

جزوه ی فیزیک - بخش اندازه گیری



۱- اندازه گیری و کمیت

در محیط پیرامون ما برخی از ویژگی‌ها مانند زیبایی یا مهربانی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. اما برای برخی از ویژگی‌ها مانند سنگینی و سبکی و یا بلندی و کوتاهی می‌توان یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان تعریف کرد و آن‌ها را اندازه‌گیری کرد. ویژگی‌ای که بر اساس اراده‌ی یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان قابل اندازه‌گیری است کمیت نامیده می‌شود.

۲- یکای (واحد) اندازه‌گیری

مقدار مشخصی از هر کمیت را به عنوان مقیاس اندازه‌گیری آن کمیت انتخاب می‌کنند که به آن یکا یا واحد اندازه‌گیری آن کمیت گفته می‌شود. اندازه‌گیری هر کمیت به این صورت انجام می‌شود که مقدار آن کمیت چند برابر مقداری است که به عنوان یکا یا واحد اندازه‌گیری برای آن کمیت در نظر گرفته شده است. برای آن که رقم‌های حاصل از اندازه‌گیری‌های مختلف یک کمیت با هم یکی باشند، دانشمندان توافق کرده‌اند که برای هر کمیت یکای معینی تعریف کنند. یکای هر کمیت باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایط فیزیکی تعیین شده تغییر نکند و همواره در دسترس باشد. مجموعه یکاهای مورد توافق بین‌المللی را به اختصار یکاهای SI می‌نامند. SI حروف اول واژه‌ی فرانسوی Systeme International به معنای دستگاه بین‌المللی است.

۳- یکاهای اصلی و فرعی

آن دسته از کمیت‌هایی را که یکاهای آن‌ها به طور مستقل و بدون رابطه با سایر یکاهای دیگر تعریف می‌شود کمیت اصلی و یکاهای آن‌ها را یکای اصلی می‌نامند. سایر کمیت‌ها را که یکاهای آن‌ها با کمک رابطه‌ی آن‌ها با کمیت‌های دیگر و با استفاده از یکاهای دیگر تعریف می‌شود کمیت فرعی و یکاهای آن‌ها را یکای فرعی می‌نامند. طول، جرم، زمان، دما و شدت جریان الکتریکی از جمله کمیت‌های اصلی در SI هستند. نیرو، اندازه حرکت، کار و میدان الکتریکی از جمله کمیت‌های فرعی در SI هستند.

۴- تعریف یکای طول در SI

یکای طول در SI متر نام دارد و آن را با نماد m نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استاندارد ساخته شده است که در موزه‌ی سور پاریس نگهداری می‌شود. این نمونه میله‌ای است از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم با دو علامت روی آن که فاصله‌ی بین آن‌ها در دمای صفر درجه‌ی سلسیوس به طور دقیق برابر طول توافق شده‌ی بین‌المللی برای یک متر است. در موسسه‌های استاندارد هر کشور نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد تهیه و نگهداری می‌شود.

۵- تعریف یکای جرم در SI

یکای جرم در SI کیلوگرم نام دارد و آن را با نماد kg نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استاندارد به صورت استوانه‌ای از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم ساخته شده است که در موزه‌ی سور فرانسه نگهداری می‌شود. در موسسه‌های استاندارد همه‌ی کشورها نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد را تهیه و نگهداری می‌کنند.

۶- تعریف یکای زمان در SI

یکای زمان در SI ثانیه نام دارد و آن را با نماد s نشان می‌دهند. طبق تعریف اولیه و قدیمی یک ثانیه برابر $\frac{1}{86400}$ یک شبانه‌روز است.

مبحث : درسنامه فصل اول فیزیک دهم ریاضی اندازه گیری



مزه ی فیزیک - بخش اندازه گیری

-۷

یکای مناسب برای کمیت‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک در SI پیشوندهایی برای یکاها تعریف کرده‌اند که با اضافه کردن آن‌ها به یکای هر کمیت می‌توان یکاهای بزرگ‌تر و کوچک‌تری را برای اندازه‌گیری مقدارهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک به وجود آورد. این یکاها در جدول زیر آورده شده‌اند.

پیشوند	مضرب	نماد	پیشوند	مضرب	نماد
دسی	10^{-1}	d	دکا	10	da
سانتی	10^{-2}	c	هکتو	10^2	h
میلی	10^{-3}	m	کیلو	10^3	k
میکرو	10^{-6}	μ	مگا	10^6	M
نانو	10^{-9}	n	گیگا	10^9	G
پیکو	10^{-12}	p	ترا	10^{12}	T

-۸

نمادگذاری علمی

در اندازه‌گیری مقدارهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک به اعدادی برخورد می‌کنیم که به علت تعداد زیاد صفر در سمت راست آن اعداد و یا تعداد زیاد صفر بعد از ممیز آن اعداد در نمایش و خواندن آن‌ها با مشکل مواجه می‌شویم و در نتیجه احتمال اشتباه افزایش پیدا می‌کند و نوشتن و محاسبه آن‌ها دشوار است. این اعداد را با استفاده از روشی که آن را نمادگذاری علمی می‌نامند نمایش می‌دهند تا هم در نمایش و هم در محاسبه سهولت ایجاد شود.

در نمادگذاری علمی هر مقدار را به صورت حاصل ضرب عددی بین ۱ و ۱۰ و ضرب توان صحیحی از ۱۰ می‌نویسند.

مثال ۱ : جرم یک الکترون بر حسب کیلوگرم برابر 9.109×10^{-31} است که آن را به صورت 9.109×10^{-31} نشان می‌دهند.

مثال ۲ : فاصله‌ی زمین تا خورشید بر حسب متر حدود $150,000,000,000$ است که آن را به صورت 1.5×10^{11} نشان می‌دهند.



مزهه ی فیزیک - بخش اندازه گیری

-۹

دقت اندازه گیری

کمترین مقداری را که یک وسیله‌ی اندازه‌گیری می‌تواند اندازه بگیرد دقت اندازه‌گیری آن وسیله می‌نامند. یک وسیله‌ی اندازه‌گیری نمی‌تواند مقداری را که کم‌تر از دقت اندازه‌گیری آن است اندازه‌گیری کند. بنابراین نتیجه‌ی اندازه‌گیری توسط یک وسیله‌ی اندازه‌گیری باید همواره مضرب درستی از دقت اندازه‌گیری آن وسیله باشد.

مثال ۱: در اندازه‌گیری طول با خط‌کشی که بر حسب میلی‌متر درجه‌بندی شده است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری بر حسب میلی‌متر بیان شود باید حتما عدد صحیح باشد.

مثال ۲: در اندازه‌گیری جرم با ترازویی که کم‌ترین درجه‌بندی آن برابر ۲۵۰ گرم است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری بر حسب گرم بیان شود باید حتما بر ۲۵۰ بخش پذیر باشد.

مثال ۳: در اندازه‌گیری حجم مایع با پیمانه‌ای که حجم آن برابر ۵ سی‌سی است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری بر حسب سی‌سی بیان شود باید حتما بر ۵ بخش پذیر باشد.

مثال ۴: اگر طول جسمی ۱۵۵ میلی‌متر و با خط‌کشی که دقت آن ۱ cm است، طول آن را اندازه بگیریم مقدار اندازه‌گیری شده برابر ۱۵ cm خواهد بود چرا که این خط‌کش مقادیر کوچک‌تر از ۱ cm را نمی‌تواند اندازه بگیرد.

۱۰- تبدیل یکای طول :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک طول را که بر حسب میکرومتر بیان شده است بر حسب هکتومتر بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک میلی‌متر چند هکتومتر است.

$$1 \text{ mm} = ? \text{ hm}$$

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ 1 \text{ hm} = 10^2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ hm}} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^2 \text{ m}} = 10^{-5} \Rightarrow 1 \text{ mm} = 10^{-5} \text{ hm}$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ mm} = x \text{ hm} \Rightarrow 1 \times 10^{-3} \text{ m} = x \times 10^2 \text{ m} \Rightarrow 10^{-3} = x \times 10^2 \Rightarrow x = 10^{-5}$$

مبحث : درسنامه فصل اول فیزیک دهم ریاضی اندازه گیری



جزوه ی فیزیک - بخش اندازه گیری

۱۱- تبدیل یکای مساحت :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک مساحت را که برحسب کیلومتر مربع بیان شده است برحسب دسی‌متر مربع بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک کیلومتر مربع چند دسی‌متر مربع است.

$$1 \text{ km}^2 = ? \text{ dm}^2$$

توجه کنید که منظور از مساحت یک کیلومتر مربع (1 km^2) مساحت یک مربع به ضلع یک کیلومتر است که این مساحت برابر $10^6 \text{ m}^2 = 1000 \text{ m} \times 1000 \text{ m} = 1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از km^2 دقیقاً $(\text{km})^2$ است و نباید آن را $k(\text{m}^2)$ یا 10^3 m^2 فرض کرد. (۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \\ 1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ dm}} = \frac{10^3 \text{ m}}{10^{-1} \text{ m}} = 10^4 \Rightarrow \left(\frac{1 \text{ km}}{1 \text{ dm}}\right)^2 = 10^8$$

$$\Rightarrow \frac{1 \text{ km}^2}{1 \text{ dm}^2} = 10^8 \Rightarrow 1 \text{ km}^2 = 10^8 \text{ dm}^2$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ km}^2 = x \text{ dm}^2 \Rightarrow 1 \times (10^3 \text{ m})^2 = x \times (10^{-1} \text{ m})^2 \Rightarrow 10^6 \text{ m}^2 = x \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 10^6 = x \times 10^{-2} \Rightarrow x = 10^8$$

۱۲- تبدیل یکای حجم :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک حجم را که برحسب دکامترمکعب بیان شده است برحسب گیگامترمکعب بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک دکامترمکعب چند گیگامترمکعب است.

$$1 \text{ dam}^3 = ? \text{ Gm}^3$$

توجه کنید که منظور از حجم یک دکامترمکعب (1 dam^3) حجم یک مکعب به ضلع یک دکامتر است که این حجم برابر $10^3 \text{ m}^3 = 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 1 \text{ dam} \times 1 \text{ dam} \times 1 \text{ dam}$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از dam^3 دقیقاً $(\text{dam})^3$ است و نباید آن را $\text{da}(\text{m}^3)$ یا 10 m^3 فرض کرد. (۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ dam} = 10 \text{ m} \\ 1 \text{ Gm} = 10^9 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ dam}}{1 \text{ Gm}} = \frac{10 \text{ m}}{10^9 \text{ m}} = 10^{-8} \Rightarrow \left(\frac{1 \text{ dam}}{1 \text{ Gm}}\right)^3 = 10^{-24}$$

$$\Rightarrow \frac{1 \text{ dam}^3}{1 \text{ Gm}^3} = 10^{-24} \Rightarrow 1 \text{ dam}^3 = 10^{-24} \text{ Gm}^3$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ dam}^3 = x \text{ Gm}^3 \Rightarrow 1 \times (10 \text{ m})^3 = x \times (10^9 \text{ m})^3 \Rightarrow 10^3 \text{ m}^3 = x \times 10^{27} \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow 10^3 = x \times 10^{27} \Rightarrow x = 10^{-24}$$

مبحث : درسنامه فصل اول فیزیک دهم ریاضی اندازه گیری



مزه ی فیزیک - بخش اندازه گیری

۱۳-۲- چگالی:

اگر از شما بپرسند که چوب سنگین تر است یا آهن، احتمالاً پاسخ شما آهن است. اما آیا یک میخ آهنی کوچک از تنه ی یک درخت سنگین تر است؟ منظور شما از این که آهن سنگین تر از چوب است، این بوده که اگر دو حجم مساوی از آهن و چوب برداریم، جرم آهن بیش تر خواهد بود. کمیت چگالی هم این موضوع را بررسی می کند. جرم یک واحد از حجم (مثلاً جرم یک سانتی متر مکعب) از هر ماده را جرم حجمی و یا چگالی آن ماده می نامند و با نماد ρ نمایش می دهند. بنابراین اگر جسمی با حجم V دارای جرم m باشد، می توان نتیجه گرفت که یک واحد از حجم

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ است. بنابراین: } \rho = \frac{m}{V}$$

یکای SI چگالی $\frac{kg}{m^3}$ است ولی واحدهای دیگری چون $\frac{g}{cm^3}$ ، $\frac{kg}{lit}$ و ... نیز کاربرد فراوانی دارند.

مثال: یک گلوله ی ۱۰۰ گرمی از فلزی به چگالی $4 \frac{g}{cm^3}$ را درون یک لیوان پر از مایعی به چگالی $0.8 \frac{g}{cm^3}$

می اندازیم. چه جرمی از مایع بیرون می ریزد؟

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{برای گلوله}} 4 = \frac{100}{V_1} \Rightarrow V_1 = 25 \text{ cm}^3$$

حجم مایعی که بیرون می ریزد، برابر حجم گلوله است. بنابراین $V_2 = 25 \text{ cm}^3$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 0.8 = \frac{m}{25} \Rightarrow m = 0.8 \times 25 = 20 \text{ g}$$

جرم مایعی که بیرون می ریزد ۲۰g است.

• چگالی یک مخلوط و یا یک آلیاژ، نسبت جرم مخلوط به حجم آن می باشد:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

مثال: 100 cm^3 از مایعی به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ را با 100 cm^3 از مایعی به چگالی $2 \frac{g}{cm^3}$ مخلوط می کنیم. چگالی مخلوط

چقدر می شود؟

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \times 100 = 100 \text{ g} \\ m_2 = 2 \times 100 = 200 \text{ g} \end{cases}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{100 + 200}{100 + 100} = \frac{300}{200} = 1.5 \frac{g}{cm^3}$$

مثال: 100 g از مایعی به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ را با 100 g از مایعی به چگالی $2 \frac{g}{cm^3}$ مخلوط می کنیم. چگالی مخلوط چقدر

می شود؟

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{100}{1} = 100 \text{ cm}^3 \\ V_2 = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{100 + 100}{100 + 50} = \frac{200}{150} = \frac{4}{3} \frac{g}{cm^3}$$

جزوه ی فیزیک - بخش بردار



-۱- کمیت‌های فیزیکی

کمیت‌های نرده‌ای : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد که اندازه یا مقدار آن کمیت می‌باشد، با یکای معین کافی است.

کمیت‌هایی مثل طول ، مساحت ، حجم ، جرم ، زمان ، چگالی و دما و جریان الکتریکی نرده‌ای هستند.
کمیت‌های برداری : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد با یکای معین کافی نیست و باید راستا و سوی این کمیت‌ها مشخص شود. به عبارت دیگر این کمیت‌ها دارای اندازه و جهت می‌باشند.
 کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی ، سرعت و نیرو برداری هستند.

-۲- بردارهای برابر

دو بردار در صورتی با هم برابرند که دارای اندازه ، راستا و سوی یکسانی باشند.

بردارهای قرینه

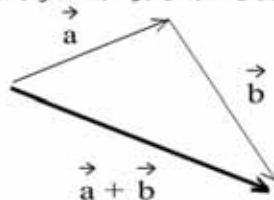
دو بردار در صورتی قرینه‌ی یکدیگرند که دارای اندازه و راستا یکسانی باشند و سوی آن‌ها متفاوت است.

زاویه یک بردار

زاویه‌ای است که این بردار در جهت مثلثاتی با راستای مثبت محور طول‌ها (X ها) می‌سازد.

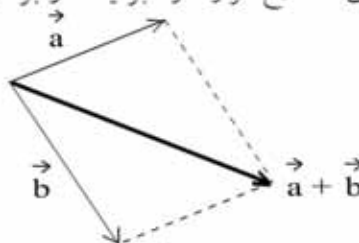
-۳- جمع دو بردار با استفاده از روش مثلث

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردار \vec{b} را روی انتهای بردار \vec{a} قرار می‌دهیم. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار \vec{a} و انتهای آن روی انتهای بردار \vec{b} قرار دارد برآیند دو بردار است.



-۴- جمع دو بردار با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردارهای \vec{a} و \vec{b} را روی هم قرار می‌دهیم. متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم که بردارها دو ضلع مجاور آن را تشکیل می‌دهند. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردارها و انتهای آن روی راس مقابل متوازی‌الاضلاع قرار دارد برآیند دو بردار است.

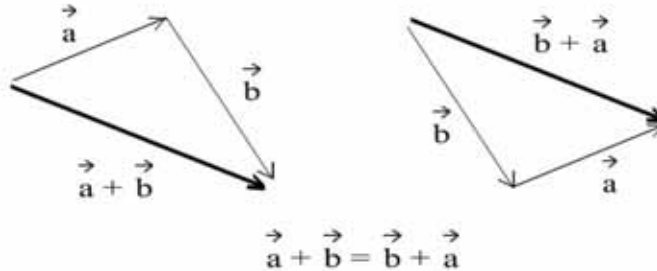




جزوه ی فیزیک - بخش بردار

نمایش خاصیت جابه جایی جمع برداری (با استفاده از روش مثلث)

-۵



نمایش بزرگی (اندازه ی) بردار

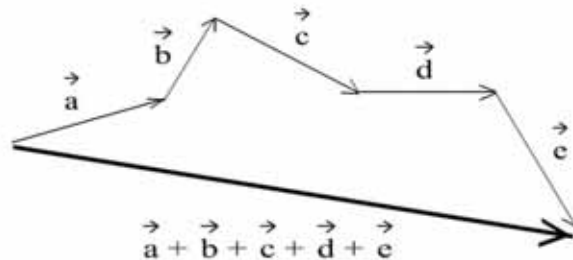
-۶

برای نمایش بزرگی (اندازه ی) بردار \vec{X} از نماد $|\vec{X}|$ یا X استفاده می شود.
توجه : برای نمایش بزرگی (اندازه ی) بردار $\vec{X} + \vec{Y}$ باید از نماد $|\vec{X} + \vec{Y}|$ استفاده کنیم و نمی توانیم از نماد $X + Y$ استفاده کنیم. زیرا نماد $X + Y$ به معنای مجموع بزرگی های (اندازه های) بردارهای \vec{X} و \vec{Y} است و به عبارت دیگر $X + Y$ برابر $|\vec{X}| + |\vec{Y}|$ است.

جمع چند بردار

-۷

برای جمع کردن چند بردار مانند بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ می توانیم به این ترتیب عمل کنیم که مطابق شکل زیر از انتهای بردار اول، برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم، برداری مساوی بردار سوم و همین طور تا آخر ... رسم می کنیم. مطابق شکل زیر برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار اول و انتهای آن روی انتهای بردار آخر قرار دارد برآیند بردارها است.



۸- بردارهای هم راستا و هم سو :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} هم راستا و هم سو باشند، برای بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار داریم :
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ یا $a + b = a + b$
یعنی بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار هم راستا و هم سو برابر جمع بزرگی های (اندازه های) دو بردار است.
در این حالت جمع دو بردار هم سو است.

جزوه ی فیزیک - بخش بردار

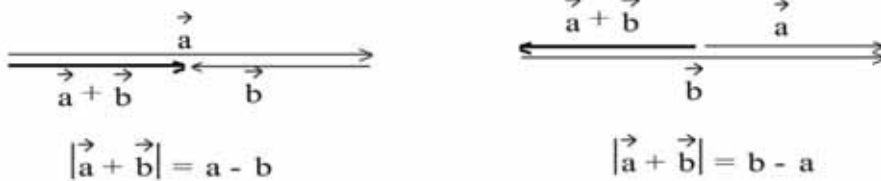


۹- بردارهای هم راستا و ناهم سو :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} هم راستا و ناهم سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \quad \text{یا} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |a - b|$$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم راستا و ناهم سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است. در این حالت جمع دو بردار با برداری که بزرگی‌اش بزرگ‌تر است، هم سو خواهد بود.



۱۰- بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} \quad \text{یا} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ضرب عدد در بردار

۱۱-

ضرب عدد مثبت در بردار : وقتی برداری را در عدد مثبتی ضرب می‌کنیم، راستا و سوی آن تغییر نمی‌کند و تنها بزرگی بردار در آن عدد ضرب می‌شود. اگر فرض کنیم عدد مثبت k در بردار \vec{a} ضرب شود داریم:



ضرب عدد منفی در بردار : وقتی برداری را در عدد منفی ضرب می‌کنیم، راستای آن تغییر نمی‌کند و سوی آن عکس می‌شود و بزرگی بردار در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود. اگر فرض کنیم که عدد منفی k در بردار \vec{a} ضرب شود، داریم:



مبحث : درسنامه فصل اول فیزیک دهم ریاضی اندازه گیری

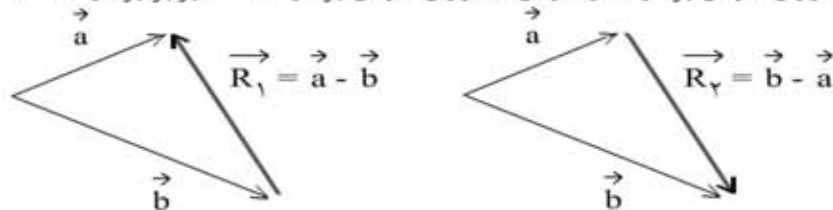


جزوه ی فیزیک - بخش بردار

-۱۲

تفریق دو بردار

برای به دست آوردن تفریق دو بردار \vec{a} و \vec{b} مطابق شکل های زیر ابتدای بردارها را روی هم قرار می دهیم. برداری که ابتدای آن روی انتهای بردار \vec{b} و انتهای آن روی انتهای بردار \vec{a} است برابر بردار $\vec{a} - \vec{b}$ است.

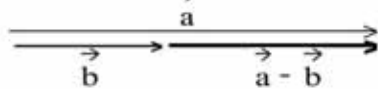


$$\Rightarrow \text{روش مثلث برای جمع دو بردار} \quad \begin{cases} \vec{b} + \vec{R}_1 = \vec{a} \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{a} + \vec{R}_2 = \vec{b} \Rightarrow \vec{R}_2 = \vec{b} - \vec{a} \end{cases}$$

با توجه به شکل های بالا نتیجه گرفته می شود تفریق دو بردار خاصیت جابه جایی ندارد. یعنی: $(\vec{a} - \vec{b}) \neq (\vec{b} - \vec{a})$.
هم چنین با توجه به شکل های بالا نتیجه گرفته می شود بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{b} - \vec{a}$ قرینه اند و $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$.

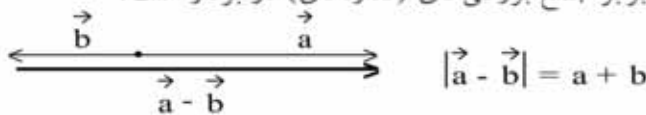
۱۳- بردارهای هم راستا و هم سو :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} هم راستا و هم سو باشند، برای بزرگی (اندازه ی) تفریق دو بردار داریم :
 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ یا $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
یعنی بزرگی (اندازه ی) تفریق دو بردار هم راستا و هم سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی های (اندازه های) دو بردار است.



۱۴- بردارهای هم راستا و ناهم سو :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} هم راستا و ناهم سو باشند، برای بزرگی (اندازه ی) تفریق دو بردار داریم :
 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ یا $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \vec{a} + \vec{b}$
یعنی بزرگی (اندازه ی) تفریق دو بردار هم راستا و ناهم سو برابر جمع بزرگی های (اندازه های) دو بردار است.

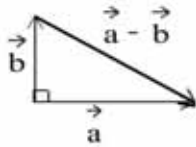




جزوه ی فیزیک - بخش بردار

۱۵- بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} \quad \text{یا} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$


بیشینه و کمینه ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار

۱۶-

برآیند دو بردار وقتی بیشترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و هم‌سو باشند. بنابراین بیشینه ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر $a + b$ است.

هم‌چنین برآیند دو بردار وقتی کمترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و ناهم‌سو باشند. بنابراین کمینه ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر $|a - b|$ است.

یعنی برای بردارهای \vec{a} و \vec{b} همواره داریم :

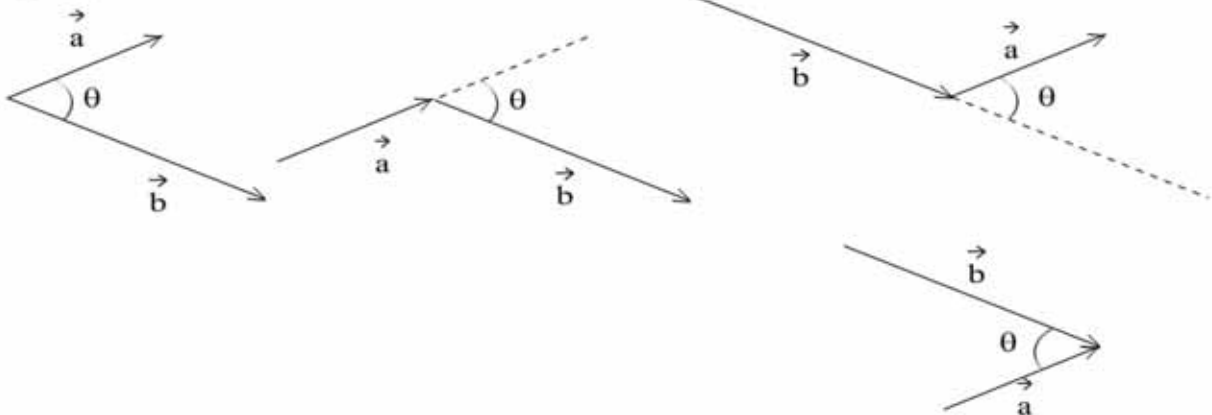
$$|a - b| < |a + b| < a + b$$

زاویه ی دو بردار

۱۷-

زاویه ی بین دو بردار هنگامی معلوم می‌شود که ابتدای دو بردار روی هم قرار بگیرند. در شکل‌های زیر زاویه ی بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} در حالت‌های مختلف نشان داده شده است. این زاویه، زاویه‌ای است بین صفر تا 180° درجه.

$$0^\circ < \theta < 180^\circ$$



بزرگی اندازه‌ی برآیند دو بردار در حالت کلی

۱۸-

بزرگی برآیند دو بردار \vec{a} و \vec{b} که زاویه ی بین آنها θ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

جزوه ی فیزیک - بخش بردار



بزرگی اندازه ی تفریق دو بردار در حالت کلی

-۱۹

بزرگی تفریق دو بردار \vec{a} و \vec{b} که زاویه ی بین آنها θ است از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

بزرگی اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه

-۲۰

بزرگی برآیند دو بردار \vec{x} و \vec{y} که زاویه ی بین آنها θ است و اندازه ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow R = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

بزرگی اندازه ی تفریق دو بردار هم اندازه

-۲۱

بزرگی تفریق دو بردار \vec{x} و \vec{y} که زاویه ی بین آنها θ است و اندازه ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

۲۲- نکته: اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها 90° درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \theta = 90^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}a$$

۲۳- نکته: اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها 120° درجه است برابر a (هم اندازه با بردارها) است.



$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \theta = 120^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{1}{2} = a$$



مزه ی فیزیک - بخش بردار

۲۴- نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۶۰° درجه است برابر $\sqrt{۳}a$ است.

$$R = ۲a \cos \frac{\theta}{۲}, \theta = ۶۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}a$$

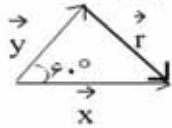
۲۵- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۹۰° درجه است برابر $\sqrt{۲}a$ است.

$$R = ۲a \sin \frac{\theta}{۲}, \theta = ۹۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}a$$

۲۶- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۱۲۰° درجه است برابر $\sqrt{۳}a$ است.

$$R = ۲a \sin \frac{\theta}{۲}, \theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}a$$

۲۷- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۶۰° درجه است برابر a (هم‌اندازه با بردارها) است.

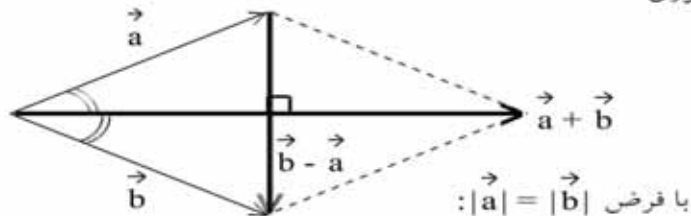


$$R = ۲a \sin \frac{\theta}{۲}, \theta = ۶۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{1}{۲} = a$$

خواص جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه

۲۸-

با توجه به شکل زیر جمع بردارهای هم‌اندازه در راستای نیم‌ساز بردارها قرار می‌گیرد و جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه بر هم عمود هستند. زیرا متوازی‌الاضلاعی که بردارها با یکدیگر می‌سازند لوزی است و قطرهای لوزی بر هم عمود و نیم‌ساز زاویه‌های لوزی هستند.



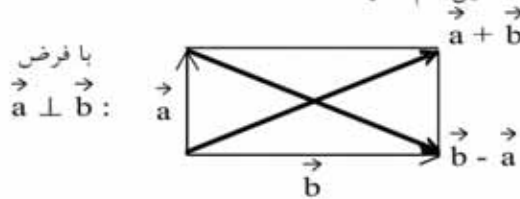


جزوه ی فیزیک - بخش بردار

-۲۹

خواص جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم

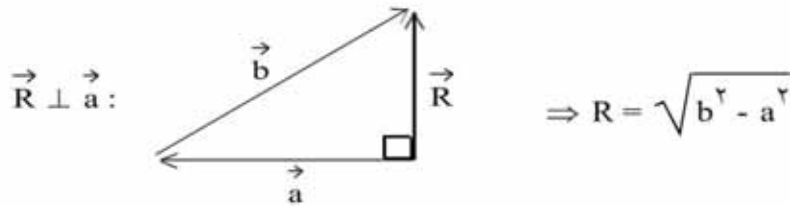
با توجه به شکل زیر جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم، هم اندازه هستند. زیرا متوازی الاضلاعی که بردارها تشکیل می دهند مستطیل است و قطرهای مستطیل هم اندازه اند.



-۳۰

عمود بودن برآیند بردارها بر یکی از بردارها

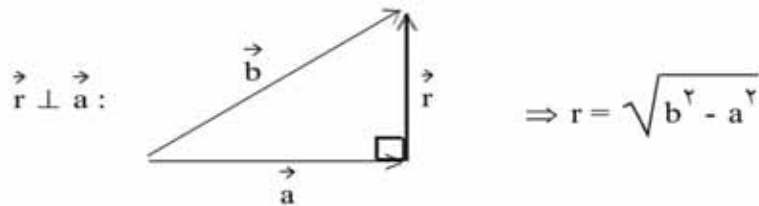
اگر برآیند دو بردار \vec{a} و \vec{b} را \vec{R} فرض کنیم و \vec{R} بر بردار \vec{a} عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :



-۳۱

عمود بودن تفریق بردارها بر یکی از بردارها

اگر تفریق دو بردار \vec{a} و \vec{b} را \vec{r} فرض کنیم و \vec{r} بر بردار \vec{a} عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :

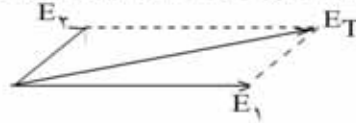




جزوه ی فیزیک - بخش بردار

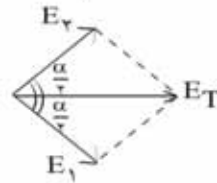
برآیند نیروها و میدان های الکتریکی

-۳۲



برآیند دو میدان الکتریکی E_1 و E_2 که با هم زاویه ی α می سازند $\leftarrow E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \alpha}$

اگر بزرگی E_1 و E_2 برابر باشد $\leftarrow E_T = 2E_1 \cos \frac{\alpha}{2}$



-۳۳
اگر بزرگی E_1 و E_2 مساوی نباشد، میدان الکتریکی برآیند نزدیک به میدان بزرگتر می شود و اگر بزرگی E_1 و E_2 مساوی باشد، میدان الکتریکی برآیند نیمساز زاویه ی بین آنها می باشد.

