

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{2k} = I, A^{2k+1} = A \Rightarrow A^7 - A^6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $S_1 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow S_1 = 10(2a_1 + 19d) \rightarrow S_7 = 10(2a_1 + 19(d+1))$
 $S_7 = 190 + S_1$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(2k\pi + \frac{i\pi}{6}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{i\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos\frac{i\pi}{6} = \sin\frac{i\pi}{6}$
 با بررسی کردن اعداد $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ مشخص می‌شود که $\{1, 5, 9\}$ جواب است.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $y = x^2 - 1$

$f \circ f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1 = \pm 1 \begin{cases} x^2 - 1 = 1 & \begin{cases} x^2 = 2 & x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = 0 & x = 0 \end{cases} \\ x^2 - 1 = -1 & \begin{cases} x^2 = 0 & x = 0 \end{cases} \end{cases}$ مضاعف

یک ریشه مضاعف و دو ریشه قرینه دارد.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه: باید $0 < k+3$ باشد تا Max داشته باشد.

$f(x) = (k+3)x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow \Delta' = 4 - k(k+3) = 0$

$-k^2 - 3k + 4 = 0 \begin{cases} k = 1 \text{ ق ق} \\ k = -4 \end{cases}$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $y - x = \sqrt{x^2 + 1} \quad y > 0$

$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$

$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

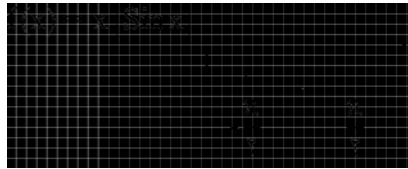
$\wedge \cos a \cos b \sin a \sin b = 2(4 \sin a \sin b \cos a \cos b) = 2(\sin 2a \sin 2b) =$

$2 \sin 2a \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \sin 2a \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \sin 4a$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x+1} \right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x + x^2 - x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روی $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ پیوسته و در صفر مشتق ناپذیر است



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4} = \frac{1}{16}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $T = 2\pi$ پس بازه‌ی مورد نظر $(\pi, 3\pi)$ است تابع $y = \text{tg} \frac{x}{2}$ را روی $(\pi, 3\pi)$ در نظر می‌گیریم تابع فوق در $x_0 = 2\pi$ دارای نقطه عطف است.

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \text{tg} \frac{x}{2}$$

یادآوری:

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $\sum b_n$ همگرا است پس $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ هم که کران دار است. لذا دنباله

$\{a_n b_n\}$ همگرا به صفر است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \lim f(x) = 3 \\ x \rightarrow 2^- \\ a_n \text{ همگرا به } 2 \text{ و کوچکتر از } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 3$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نقاط صحیح باید بررسی کنیم که در بازه داده شده نقاط $x = 0$ و $x = 1$ هستند که تابع در نقطه‌ی به طول $x = 1$ پیوسته است و در نقطه به طول $x = 0$ ناپیوسته است.

$$f(x) = [x]([x] - 1)$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} \rightarrow y' = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \geq 0 \\ nax^{n-1} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} +\sin x & x \geq 0 \\ n(n-1)ax & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'''(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ n(n-1)(n-2)ax^{n-3} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(0^+) = f'''(0^-) \Rightarrow 1 = n(n-1)(n-2)a \Rightarrow n = 3 \text{ و } a = \frac{1}{6}$$

دقت کنید اگر $n > 3$ یا $n < 3$ باشد، $f'''(0^-)$ وجود ندارد یا صفر است که با $f'''(0^+)$ فرق می کند.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر نقطه اکسترم نسبی، نقطه بحرانی است عکس آن صحیح نیست.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 0$ و $x = 2$ مجانب‌های قائم‌اند، $y = 1$ مجانب افقی است. تابع مجانب مایل ندارد.

$$y' = \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \sin x \rightarrow y'(0) = 0 \quad \text{۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.}$$

$$y'(0^+) > 0, y'(0^-) > 0 \Rightarrow \text{در اطراف صفر هم علامتند } \sin x \text{ و } x$$

$y' = 0$ ریشه مضاعف دارد پس باید عطف داشته باشد. در ضمن $f(x)$ در اطراف صفر صعودی است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{\pi \sin \pi x}{-\frac{1}{\sqrt{2x}}} = -\pi$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حد را با قاعده‌ی هویتهال حل می کنیم.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} - 2 \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right)$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} = 0 \Rightarrow \text{در فواصل پیوسته تابعی ثابت است.}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) - f(x) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$C_n(f) = \sum_{i=1}^4 f(c_i) \Delta x$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$C_n(f) = ? \quad \Delta x = \frac{15 - \frac{7}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \rightarrow C_n(f) = \frac{1}{\lambda} \left(f(1) + f\left(\frac{10}{\lambda}\right) + f\left(\frac{12}{\lambda}\right) + f\left(\frac{14}{\lambda}\right) \right)$$

$$f(x) = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{4x}\right) \rightarrow f(1) = \text{Log}\frac{5}{4}$$

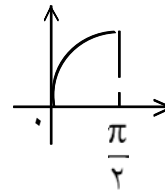
$$f\left(\frac{10}{\lambda}\right) = \text{Log}\left(\frac{6}{5}\right) \rightarrow f\left(\frac{12}{\lambda}\right) = \text{Log}\left(\frac{7}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{14}{\lambda}\right) = \text{Log}\left(\frac{8}{7}\right) \rightarrow C_n(f) = \frac{1}{\lambda} \left(\text{Log}\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \right) = \frac{1}{\lambda} \text{Log } 2$$

$$(f \text{ پیوسته و فرد}) \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

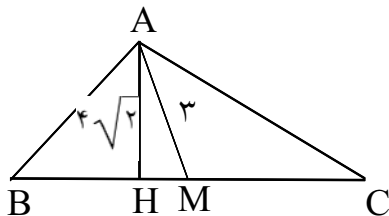
۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع داده شده فرد و پیوسته است. پس:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$



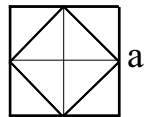
۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس: $\begin{cases} BC = 6 \\ MC = 3 \end{cases}$



در مثل AHM با توجه به رابطه فیثاغورس $MH = 1$

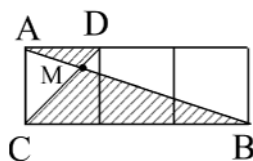
$$\text{پس در مثل AHC} \quad AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = 2\sqrt{6}$$



$$\frac{S}{S'} = \frac{a \times a}{\frac{a \times a}{2}} = 2$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

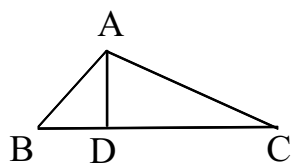
۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AMD و MBC متشابهند زیرا $AD \parallel BC$ پس:



$$AB = \sqrt{10}, \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{10} - AM} = \frac{1}{3}$$

$$3AM = \sqrt{10} - AM \Rightarrow AM = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

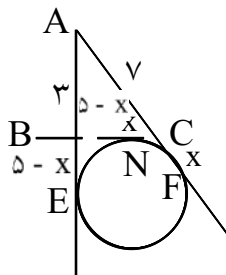


$$\begin{cases} AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \\ AD^2 = AB \cdot AC \end{cases}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

پس $BD \cdot DC = 0$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

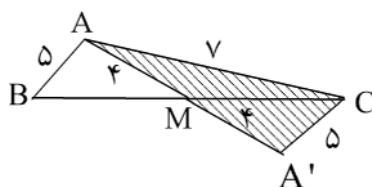


$$AE = AF = \text{نصف محیط} = 7/5$$

$$v + x = 7/5 \Rightarrow x = 0/5$$

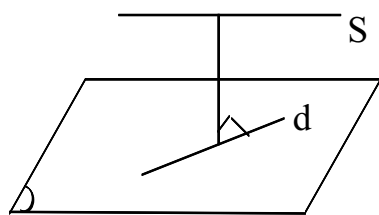
$$5 - x = 5 - 0/5 = 4/5$$

$$\frac{NC}{BN} = \frac{0/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$



۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مسئله را حل شده فرض کنید میانه m_a را به اندازه خودش ادامه داده مثلث $AA'C$ با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است. بعد از رسم مثلث $AA'C$ راس C را به M وصل کرده به اندازه خودش ادامه می دهیم تا B بدست آید. با دو مثلث همنهشت ABC را می توان ساخت پس جواب مثلث، منحصر به فرد را می پذیریم.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله عمود منصف دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 5)$ را نوشته به صورت $y = -x + 3$ خواهد بود که در این صورت شیب خطی که $C(3, 4)$ و قرینه آن روی آن قرار دارد باید یک باشد با آزمون گزینه ها، گزینه ی ۴ صادق است.



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. S و d متنافرند. چون عمود مشترک آن ها منحصر به فرد است.

$$|a - b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b} = \sqrt{24 + 25} = 7$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow \frac{a-1}{a} = \frac{b+1}{b-1} = \frac{4}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در معادله صفحه موازی محور X ها حرف X وجود ندارد.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای m ، عددگذاری میکنیم تا دو خط به دست آید. محل برخورد آنها، مرکز دایره است.

$$\left. \begin{matrix} m = -2 \Rightarrow x = +1 \\ m = -1 \Rightarrow y = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{مرکز: } C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow CM = R = 5$$

$$x = \alpha - a = 3$$

$$F \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ a = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله سهمی}} (y - 1)^2 = -4(x - 2) \quad \text{گزینه ۴ پاسخ صحیح است.}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \quad A \left| 1 + 2\sqrt{2} \right| \left| 1 - 2\sqrt{2} \right| \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک دوران محورها مقطع مخروطی داده شده را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$$\frac{(x'^2 - y'^2)}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = 1$$

$$x'^2 - y'^2 + 2x' - 2y' = 2 \Rightarrow \begin{cases} (x' + 1)^2 - (y' + 1)^2 = 2 \\ \frac{(x' + 1)^2}{2} - \frac{(y' + 1)^2}{2} = 1 \Rightarrow (I) \end{cases}$$

$$(I) : \text{هذلولی} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{جمع } a \text{ برابر سطر اول با}} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ 0 & a(a+1) & a(b+1)+c \\ 0 & b(a+1)-c & b(b+1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} ab(a+1)(b+1) - [(b(a+1) - c)(a(b+1) + c)] = 0 \Rightarrow$$

$$ab(a+1)(b+1) - ab(a+1)(b+1) - bc(a+1) + ac(b+1) + c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c(-ab - b + ab + a + c) = 0 \Rightarrow c(a - b + c) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B \quad \text{گزینه ۳ پاسخ صحیح است.}$$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی ایست در بدترین حالت، در هر ماه، ۱ نفر قرار دهیم که اگر ۴ بار این عمل را انجام دهیم، ۶ نفر می ماند که آنها را نیز در لانه‌ها پخش می کنیم که حداقل ۵ نفر در یک لانه خواهیم داشت.

$$\left\lceil \frac{54}{12} \right\rceil + 1 = 5 \quad (\text{اصل لانه کبوتری})$$

