

تاریخ:

وقت: دقیقه

نام و نام خانوادگی:

تعداد سوالات: ۲۰

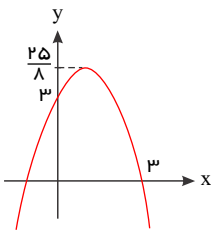
علیرضا فیضیان

موضوع

۱. اگر α و β ریشه‌های $x^2 - (m+3)x + 8 = 0$ باشند، مقدار m کدام باشد تا α و β جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟
 (۱) $m = -3$ یا $m = 9$ (۲) $m = -9$ یا $m = 3$ (۳) $m = 3$ یا $m = 9$ (۴) $m = -9$ یا $m = -3$

۲. اگر بین مقادیری که تابع $f(x) = x^2 + (4m-1)x + 1$ را صفر می‌کند، رابطه‌ی $x' - x'' = \sqrt{x'} + \sqrt{x''}$ برقرار باشد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۱) $\{\frac{3}{4}\}$ (۲) $\{-\frac{1}{2}\}$ (۳) $\{\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\}$ (۴) $\{2\}$



۳. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، a کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۴. نقطه A روی خط $y = 2x - 1$ طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(0, -1)$ و $C(2, 3)$ برابر $\sqrt{45}$ است. فاصله A از مبدأ مختصات کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۵. دایره‌ای به مساحت 9π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $3x - 4y = 1$ و $8y + nx = m$ مماس است. مقدار $m + 3n$ کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) -20 (۲) 40 (۳) -60 (۴) 80

۶. در مثلث ABC با رئوس $A(1, 1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(6, 2)$ ، فاصله ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟
 (۱) $2, 1$ (۲) $2, 4$ (۳) $2, 7$ (۴) 3

۷. اگر در معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + m = 0$ ، $m > 0$ و یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشه دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟
 (۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 1

۸. در مربع $ABCD$ ، مختصات رأس A به صورت $A(3, 2)$ است و ضلع BC روی خط $y = kx + 1$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع ۵ باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۹. مجموع فواصل نقطه $A(\alpha, 2\alpha)$ تا دو نقطه مبدأ مختصات و $M(2, 4)$ ، برابر $2\sqrt{5}$ است. دقیق‌ترین محدوده α کدام است؟
 (۱) $\alpha \in \mathbb{R}$ (۲) $\alpha \leq 0$ (۳) $\alpha > 2$ (۴) $\alpha \in [0, 2]$

۱۰. خطوط $y = 2$ ، $y = 5$ و $3x - 4y + 11 = 0$ منطبق بر سه ضلع یک لوزی هستند. کدام یک از نقاط زیر می‌تواند یکی از رئوس این لوزی باشد؟

(۱) $(-6, 2)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(8, 2)$ (۴) $(-1, 5)$

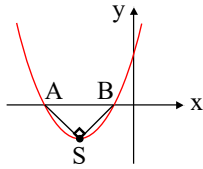
۱۱. مثلث ABC با رئوس $A(-1, 2)$ ، $B(3, 2m+1)$ و $C(-2, -2)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۲) $\frac{17}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (۴) $\sqrt{34}$

۱۲. به ازای چه مقدار از a ، مینیمم تابع $y = ax^2 - 4x + a$ ، برابر ۲ است؟

(۱) $1 - \sqrt{5}$ (۲) $1 + \sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{5} - 1$

۱۳. نمودار تابع $y = 5x^2 + 12x + a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABS در رأس S قائمه باشد، مقدار a کدام است؟ (S رأس سهمی است.)



(۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۴. اگر $x = -1$ تنها صفر تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 1}{9x^2 + ax + b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 14\beta$ کدام است؟

(۱) ۵۷ (۲) ۴۲ (۳) ۷۲ (۴) -۲۷

۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(2x - 3) = 4$ باشند، کدام معادله دارای ریشه‌های $1 - \frac{2}{\alpha}$ و $1 - \frac{2}{\beta}$ می‌باشد؟

(۱) $2x^2 + 7x - 1 = 0$ (۲) $2x^2 + 5x - 1 = 0$
(۳) $2x^2 - 7x + 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

۱۷. اگر معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{x+a}{x^2-4} = 1$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) -۲۰

۱۸. معادله $\sqrt{\sqrt{x+3} - x} = 1 + \sqrt{1-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹. اگر نقطه $A(0, 6)$ قرینه نقطه B نسبت به نقطه $M(4, 7)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۰. به ازای چه حدودی از a تابع درجه دوم $f(x) = (a-1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (a+1)$ از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

(۱) $a \geq 2$ (۲) $1 \leq a \leq 2$ (۳) R (۴) $a > 1$

۱. گزینه ۲ نکته ۱: اگر a, b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است؛ یعنی:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

نکته ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

α, β و $\alpha + \beta$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\beta = \frac{\alpha + (\alpha + \beta)}{2} \Rightarrow 2\beta = 2\alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

از طرفی چون α و β ریشه‌های $x^2 - (m+3)x + 8 = 0$ هستند، داریم:

$$\begin{cases} P = \alpha\beta = 8 \\ S = \alpha + \beta = m + 3 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = m + 3 \xrightarrow{\beta = 2\alpha} 3\alpha = m + 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{m+3}{3} \\ \beta = \frac{2}{3}(m+3) \end{cases} (*)$$

$$\alpha\beta = 8 \xrightarrow{(*)} \frac{2}{9}(m+3)^2 = 8 \Rightarrow (m+3)^2 = 36 \Rightarrow m+3 = \pm 6 \Rightarrow m = 3 \text{ ya } m = -9$$

۲. گزینه ۲ اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ باشند، در این صورت طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x' - x'')^2 = (\sqrt{x'} + \sqrt{x''})^2 \Rightarrow x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = x' + x'' + 2\sqrt{x'x''}$$

$$\Rightarrow (S^2 - 2P) - 2P = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow S^2 - 4P - S - 2\sqrt{P} = 0 \quad (1)$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = 1 - 4m, P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = 1 \xrightarrow{(1)} (1 - 4m)^2 - 4 - (1 - 4m) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 4m - 6 = 0 \Rightarrow 8m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = \frac{3}{4}$$

اما اگر $m = \frac{3}{4}$ آن‌گاه $x' = x'' = -1$ که غیرقابل قبول اند پس $m = -\frac{1}{2}$

۳. گزینه ۳

$$f(0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3$$

یکی از ریشه‌ها $x = 3$ است، پس $f(3) = 0$ می‌باشد.

$$9a + 3b + 3 = 0 \xrightarrow{+3} 3a + b + 1 = 0$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{25}{8}$ است.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -\frac{b^2 - 4a(3)}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -b^2 + 12a = \frac{25}{2}a \xrightarrow{\times 2} -2b^2 + 24a = 25a \Rightarrow a = -2b^2$$

به جای a در معادله‌ی $3a + b + 1 = 0$ مقدار $-2b^2$ را قرار می‌دهیم.

$$3(-2b^2) + b + 1 = 0 \Rightarrow -6b^2 + b + 1 = 0 \Rightarrow 6b^2 - b - 1 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2(6)} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون $a < 0$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{2a})$ هم مثبت است پس باید $b > 0$ باشد و $b = -\frac{1}{3}$ قابل قبول نیست.

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2b^2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

۴. گزینه ۴ مختصات A را به صورت $(x, 2x-1)$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{45} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (2x-1+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-1-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}|x| + \sqrt{5}|x-2| = 3\sqrt{5} \Rightarrow |x| + |x-2| = 3$$

$$x \geq 2: x + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 2.5 \Rightarrow A_1(2.5, 4)$$

$$0 < x < 2: x - x + 2 = 3 \Rightarrow 2 = 3 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x \leq 0: -x - x + 2 = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2(-0.5, -2)$$

$$OA_1 = \sqrt{6.25 + 16} = \sqrt{22.25} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$OA_2 = \sqrt{0.25 + 4} = \sqrt{4.25} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

۵. گزینه ۲ مساحت دایره برابر 9π است، پس شعاع آن برابر $r = 3$ است.

طرفین معادله $3x - 4y = 1$ را در -2 ضرب می‌کنیم:

$$8y - 6x = -2$$

دو خط $8y - 6x = -2$ و $8y + nx = m$ موازی‌اند، پس $n = -6$. فاصله دو خط موازی باید برابر قطر دایره یعنی ۶ باشد:

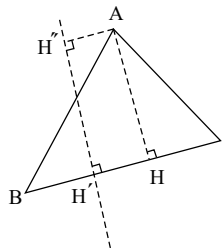
$$\frac{|m+2|}{\sqrt{64+36}} = 6 \Rightarrow |m+2| = 60 \Rightarrow \begin{cases} m = 58 \\ m = -62 \end{cases}$$

$$m + 3n = 58 + (-18) = 40$$

$$m + 3n = -62 + (-18) = -80$$

۶. گزینه ۱ طبق شکل مقابل فاصله ارتفاع رأس A تا عمود منصف BC همان فاصله نقطه A تا عمود منصف BC است، پس معادله عمود منصف

BC را یافته و فاصله A را تا این خط به دست می‌آوریم:



$$B(2, -1), C(6, 2) \rightarrow H' = \frac{B+C}{2} \Rightarrow H'(4, \frac{1}{2})$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - (-1)}{6 - 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{شیب عمود منصف} = -\frac{4}{3}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x - 4) \xrightarrow{\times 6} 6y - 3 = -8x + 32 \Rightarrow 8x + 6y - 35 = 0$$

$$A = (1, 1) \Rightarrow AH'' = \frac{|8 + 6 - 35|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{21}{10} = 2.1$$

۷. گزینه ۱ یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشه دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است، پس:

$$x_2 = 2x_1 + 3, S = x_1 + x_2 = m + 1 \Rightarrow x_1 + 2x_1 + 3 = m + 1$$

$$\Rightarrow 3(x_1 + 1) = m + 1 \Rightarrow x_1 = \frac{m}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 2\left(\frac{m}{3} - \frac{2}{3}\right) + 3$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2m}{3} + \frac{5}{3}, P = x_1 \cdot x_2 = m \Rightarrow \left(\frac{m}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2m}{3} + \frac{5}{3}\right) = m$$

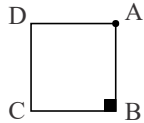
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{9} + \frac{5m}{9} - \frac{4m}{9} - \frac{10}{9} = m \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}} 2m^2 + m - 10 = 9m$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 8m - 10 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} m^2 - 4m - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases} \quad (m > 0 \text{ غ ق ق } m = -1)$$

۸. گزینه ۳ نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصله نقطه $A(3, 2)$ از خط $y - kx - 1 = 0$ برابر طول ضلع مربع است. از آنجا که مساحت مربع برابر ۵ است، طول ضلع مربع برابر $\sqrt{5}$ است، پس با توجه به نکته بالا می توان نوشت:



$$\sqrt{5} = \frac{|2 - 3k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{k^2 + 1} = |-3k + 1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 5(k^2 + 1) = (-3k + 1)^2$$

$$\Rightarrow 5k^2 + 5 = 9k^2 - 6k + 1 \Rightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0$$

راه حل اول: ریشه های معادله را به دست می آوریم:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 25 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow k_1 = 2 \text{ یا } k_2 = -\frac{1}{2}$$

$$k_1 + k_2 = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ بنابراین:}$$

راه حل دوم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ نکته: اگر } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله } ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشند، آنگاه:}$$

با توجه به نکته، چون معادله حاصل دارای دو ریشه است ($\Delta > 0$)، پس مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر $\frac{3}{2}$ است.

۹. گزینه ۴ نکته: $\sqrt{u^2} = |u|$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ نکته: فاصله دو نقطه } A(x_1, y_1) \text{ و } B(x_2, y_2) \text{ برابر است با:}$$

طبق فرض، مجموع فواصل نقطه $A(\alpha, 2\alpha)$ تا نقطه $O(0, 0)$ و $M(2, 4)$ برابر $2\sqrt{5}$ است، بنابراین با استفاده از نکته بالا داریم:

$$OA + AM = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} = \sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5(\alpha - 2)^2}$$

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{\alpha^2} + \sqrt{5} \times \sqrt{(\alpha - 2)^2} \Rightarrow \sqrt{5}(|\alpha| + |\alpha - 2|) = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |\alpha| + |\alpha - 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 2: 2\alpha - 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2 \\ 0 \leq \alpha < 2: \alpha + 2 - \alpha = 2 \checkmark \\ \alpha < 0: -\alpha + 2 - \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases} \text{ همواره برقرار}$$

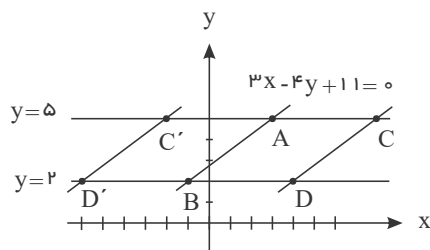
بنابراین دقیق ترین محدوده α عبارت است از: $[0, 2]$

۱۰. گزینه ۱ نکته: فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

دو خط $y = 2$ و $y = 5$ موازی هستند. محل تلاقی این دو خط با خط $3x - 4y + 11 = 0$ که دو رأس لوزی هستند، پیدا می کنیم.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 20 + 11 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 5)$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x - 8 + 11 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 2)$$



فاصله دو نقطه A و B طول ضلع لوزی می باشد، که برابر است با:

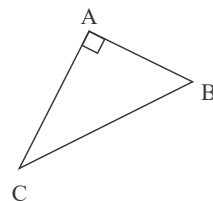
$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

دو رأس دیگر می توانند سمت راست یا چپ ضلع AB باشند، اگر سمت راست باشند، با توجه به اینکه طول ضلع لوزی برابر ۵ است، مختصات آن ها به صورت C(3+5, 5) و D(-1+5, 2) یعنی C(8, 5) و D(4, 2) است و اگر سمت چپ باشند، مختصات آن ها به صورت C'(-2, 5) و D'(-6, 2) است. فقط نقطه D'(-6, 2) در گزینه ها وجود دارد. بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱.۱. گزینه ۳ از آن جا که مثلث در رأس A قائمه است، داریم:

$$m_{AB} = \frac{2m+1-2}{3-(-1)} = \frac{2m-1}{4}$$

$$m_{AC} = \frac{-2-2}{-2-(-1)} = 4$$



$$AB \perp AC \Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{2m-1}{4} \times 4 = -1 \Rightarrow 2m-1 = -1 \Rightarrow m = 0$$

معادله ضلع BC را می نویسیم:

$$\begin{cases} B(3, 1) \\ C(-2, -2) \end{cases} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-2-1}{-2-3} = \frac{3}{5}$$

$$BC: y-1 = \frac{3}{5}(x-3) \Rightarrow 5y-5 = 3x-9 \Rightarrow 3x-5y-4 = 0$$

طول ارتفاع AH برابر فاصله رأس A تا ضلع BC است.

$$AH = \frac{|3(-1) - 5(2) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{17}{\sqrt{34}} \Rightarrow AH = \frac{17}{\sqrt{34}} \times \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

۱.۲. گزینه ۲ طبق فرض مسئله داریم:

$$\text{طول نقطه میانی} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$y = ax^2 - 4x + a \Rightarrow 2 = a\left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{a}\right) + a \Rightarrow 2 = \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + a \xrightarrow{\times a} 2a = 4 - 8 + a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 4 = 0$$

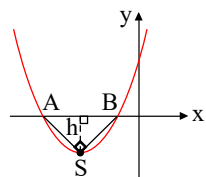
$$\Rightarrow \Delta = 4 + 16 = 20 \rightarrow a = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

نکته: با توجه به اینکه سهمی دارای نقطه ی می نیم است. پس ضریب x^2 باید مثبت باشد. یعنی $a > 0$ است.

$$a_1 = 1 + \sqrt{5} \quad \text{ق ق}$$

$$a_2 = 1 - \sqrt{5} \quad \text{غ ق ق}$$

۱.۳. گزینه ۱ نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، مختصات رأس سهمی $S \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ و تفاضل ریشه ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.



نکته: در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

نکته: در مثلث متساوی الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق اند.

چون S، رأس سهمی است، پس $SA = SB$ و در نتیجه $\triangle ABS$ متساوی الساقین نیز می باشد. بنابراین ارتفاع وارد بر وتر AB، میانه

$$h = \frac{|AB|}{2} \quad \text{پس: هم هست.}$$

$$\begin{cases} |AB| = |\text{تفاضل ریشه های سهمی}| = \frac{\sqrt{\Delta}}{5} \\ h = |\text{عرض رأس سهمی}| = \left| \frac{-\Delta}{20} \right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta}{20} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{5} \Rightarrow \left| \frac{\Delta}{20} \right| = \sqrt{\Delta} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\Delta^2}{4} = \Delta \Rightarrow \Delta^2 - 4\Delta = 0$$

زیرا معادله $\Delta \neq 0$

$$\Delta = 4 \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4(5a) = 144 - 20a = 4 \Rightarrow 20a = 140 \Rightarrow a = 7$$

دورریشه‌ی متمایز دارد

۱۴. گزینه ۲ نکته ۱: صفر یک تابع یعنی عددی که به ازای آن مقدار تابع برابر صفر باشد.

نکته ۲: در معادلات شامل عبارتهای گویا، جوابی که مخرج کسرهای معادله را صفر کند، قابل قبول نیست.

$$\frac{ax^2 + 2x - 1}{9x^2 + ax + b} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2x - 1 = 0$$

$x = -1$ صفر این معادله است، پس داریم:

$$a(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0 \Rightarrow a - 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 3$$

پس معادله به صورت $3x^2 + 2x - 1 = 0$ است. اگر $x = -1$ بخواهد تنها صفر این معادله باشد، دو حالت وجود دارد:

حالت ۱: باید $x = -1$ ریشه مضاعف $3x^2 + 2x - 1 = 0$ باشد که چون $\Delta = 16$ ، امکان پذیر نیست.

حالت ۲: ریشه دیگر معادله، ریشه مخرج هم باشد و در نتیجه قابل قبول نباشد:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{1}{3}$$

پس $x = \frac{1}{3}$ ریشه مخرج است:

$$9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \Rightarrow 1 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

۱۵. گزینه ۱ نکته: اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ، $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

چون α ریشه‌ی معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ است، پس در آن صدق می کند، بنابراین:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 5 \Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 + 5\alpha \xrightarrow{\alpha^2 = 3\alpha + 5} 3(3\alpha + 5) + 5\alpha = 14\alpha + 15$$

با جایگذاری این مقدار داریم:

$$\alpha^3 + 14\beta = 14\alpha + 15 + 14\beta = 14(\alpha + \beta) + 15 = 14S + 15 = 14 \times 3 + 15 = 57$$

۱۶. گزینه ۳

روش اول:

$$x(2x - 3) = 4 \rightarrow 2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها معکوس شوند}} -4x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه ها } (-2) \text{ برابر شوند}} -4x^2 + (-2)(-3x) + (-2)^2(2) = 0 \rightarrow -4x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه ها افزوده شود}} -4(x-1)^2 + 6(x-1) + 8 = 0$$

$$\rightarrow -4x^2 + 8x - 4 + 6x - 6 + 8 = 0 \rightarrow -4x^2 + 14x - 2 = 0 \rightarrow +2x^2 - 7x + 1 = 0$$

روش دوم:

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$S = 1 - \frac{2}{\alpha} + 1 - \frac{2}{\beta} = 2 - \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = 2 - \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$P = \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 - 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{-2}\right) + \frac{4}{-2} = 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

۱۷. گزینه ۴ ابتدا مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{x(x+2)+x+a}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + a = x^2 - 4 \Rightarrow 3x + a = -4 \Rightarrow x = \frac{-4-a}{3}$$

برای این که ریشه بدست آمده قابل قبول نباشد باید مخرج کسر را صفر کند پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{x = \frac{-4-a}{3}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-4-a}{3} = 2 \Rightarrow -4-a = 6 \Rightarrow a = -10 \\ \frac{-4-a}{3} = -2 \Rightarrow -4-a = -6 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right.$$

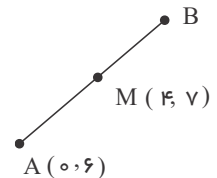
$$\Rightarrow a = -10 \times 2 = -20$$

۱۸. گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - x &= 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x} \\ \Rightarrow \sqrt{x+3} &= 2 + 2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3 = 4 + 4 - 4x + 8\sqrt{1-x} \\ \Rightarrow 5x - 5 &= 8\sqrt{1-x} \Rightarrow 25(x-1)^2 = 64(1-x) \Rightarrow 25(x-1)^2 + 64(x-1) = 0 \\ \Rightarrow (x-1)(25x - 25 + 64) &= 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (25x + 39) = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{39}{25} \end{cases} & \text{ جواب } x = -\frac{39}{25} \text{ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب } x = 1 \text{ است.} \end{cases}$$

۱۹. گزینه ۴ اگر نقطه A را نسبت به نقطه M قرینه کنیم تا نقطه B به دست آید، نقطه M وسط پاره خط AB است. داریم:

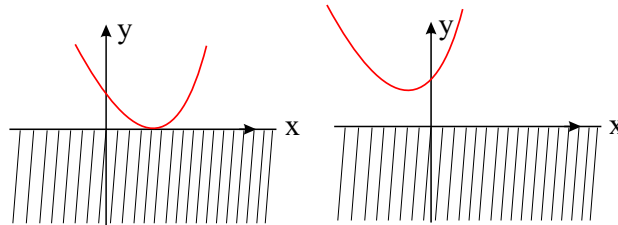
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2x_M - x_A \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2y_M - y_A \end{cases}$$



در نتیجه مختصات نقطه B به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 2(4) - 0 = 8 \\ y = 2(8) - 6 = 10 \end{cases} \Rightarrow x_B + y_B = 8 + 10 = 18$$

۲۰. گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد.



توجه: برای اینکه سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید

$$\Delta \leq 0$$

$$(1) \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4 \Rightarrow |a| \geq 2$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 2 \quad (2)$$

$$\frac{(1) \cap (2)}{\rightarrow} a \geq 2$$