گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

(فصل ۷)

سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

آنالیز ترکیبی:

شاخه‌ای از ریاضیات که در آن روش‌هایی برای بدست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل، بدون شمارش معرفی می‌گردد.

فاکتوریل:

اگر n یک عدد طبیعی باشد:

$n! = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 1$

نتیجه: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \ldots$

قرارداد: $0! = 1$

اصل جمع:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشند و انجام همزمان این دو عمل، غیرممکن باشد، تعداد حالات وقوع عمل اول یا عمل دوم برابر است با $n_1 + n_2$. مثلاً اگر هشت پیراهن آبی و ۱۲ پیراهن قرمز داشته باشیم به ۲۰ حالت می‌توانیم پیراهن بپوشیم.

اصل ضرب:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد، به فرض آنکه وقوع این اعمال بر یکدیگر تأثیری نداشته باشد تعداد حالات انجام همزمان این دو عمل برابر است با $n_1 \times n_2$. مثلاً اگر ۵ پیراهن و ٤ شلوار داشته باشیم به ۲۰ طریق می‌توان لباس پوشید.

جایگشت n شیء متمایز:

حالات مختلف قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء می‌نامند. در واقع حالات جابه‌جاشدن n شیء در یک ردیف را جایگشت آن n شیء می‌نامند. مثلاً جایگشت سه حرف a,b,c عبارت است از abc , acb bac , bca , cab , cba

قضیه: تعداد جایگشت های n شئ متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با: $n!$

تذکر: در این درس هرگاه صحبت از جایگشت می شود ، منظور تعداد جایگشتهاست .

☜ **مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ به چند طریق می‌توان اعداد هفت رقمی بدون ارقام تکراری نوشت به طوری که زوج باشد؟**

✍ **حل:**

برای آنکه عدد زوج باشد باید رقم سمت راست آن زوج باشد .

در حالتی که تکرار ارقام جایز نیست ، باید نسبت به وضعیت صفر مسأله را به دو حالت تقسیم کرد .چون اگـر صـفر در سمت چپ قرار بگیرد عدد هفت رقمی نخواهد بود لذا مسأله را در دو حالت بررسی می کنیم .

حالت اول حالتی است که صفر در سمت راست قرار دارد و لذا دیگر در سمت چپ قرار نخواهـد گرفـت و حالـت دوم حالتی است که ارقام زوج دیگر در سمت راست قرار بگیرند .

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{0}{\underline{1}} \\ \\ \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{\substack{2\\4\\6}}{\underline{3}} \end{array}\right\} \rightarrow$$

جواب $= 6! + 15\times 5!$

☜مثال: جواب مثال قبلی در حالتی که ارقام امکان تکرار شدن داشته باشند را به دست آورید .

✍ حل:

$\underline{6}\quad \underline{7}\quad \underline{7}\quad \underline{7}\quad \underline{7}\quad \underline{7}\quad \underset{0,2,4,6}{\underline{4}} \rightarrow$ جواب $= 6\times7^5\times4$

در این حالت چون امکان تکرار وجود دارد، به دو حالت کردن مسأله نیاز نیست، چون هم‌چنان باید مواظب باشیم صفر در سمت چپ عدد قرار نگیرد.

☜مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت به طوریکه تکرار ارقام جایز است؟

✍ حل: با تقسیم کردن اعداد بزرگتر از ۳۵۰۰ به دو گروه خواهیم داشت :

$\underset{3}{\underline{1}}\quad \underset{5,6,7}{\underline{3}}\quad \underline{8}\quad \underline{8}\qquad 1\times3\times8\times8$

$\underset{4,5,6,7}{\underline{4}}\quad \underline{8}\quad \underline{8}\quad \underline{8}\qquad 4\times8\times8\times8$

$\rightarrow$ تعداد اعداد: $3\times8^2+4\times8^3-1$

خود ۳۵۰۰ را نمی‌خواهد

☜مثال: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می‌توان تشکیل داد که حرف اولش نقطه نداشته باشد؟

✍ حل:

$\underline{4}\quad \underline{5}\quad \underset{م،ه،و،ر}{\underline{4}} \rightarrow\ = 4\times5\times4 = 80$

دقت کنید که ی در اول کلمه نقطه‌دار می‌شود.

☜مثال: تعداد حالاتی که می‌توان چهار کتاب ریاضی مختلف و سه فیزیک مختلف یک در میان در قفسه کنار هم قرار داد چقدر است؟ اگر چهار کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک موجود بود جواب مسأله چه می‌شد؟

✍ حل:

ر ف ر ف ر ف ر $\rightarrow\ 4!\times3!$

ف/ر ر ف ر ف ر ف $\rightarrow$ می‌تواند ریاضی شروع‌کننده باشد یا فیزیک $\rightarrow 2\times4!\times4!$

☜مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که شامل عدد ۲ باشد؟

✍ حل: به جای دسته بندی مسأله به سه حالت بهتر است تنها حالت غیر قابل قبول را از بین حالات حذف کنیم :

$\underline{8}\quad \underline{9}\quad \underline{9}$ اعداد فاقد ۲: 8×9^2

اعداد شامل ۲: $900-8\times9^2 = 9(100-72) = 9\times28 = 252$

قضیه طناب پیچ:

تعداد جایگشت n شیء متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار گرفته باشند برابر است با $(n-r+1)!r!$ و تعداد جایگشت‌های n شیء معین و متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار نداشته باشند، برابر است با $n!-(n-r+1)!r!$

مثال: با حروف a,b,c,d,e,f چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که حتماً a,b کنار هم باشند و c,d کنار هم نباشند؟

حل:

۲!×۵! = تعداد اعدادی که a,b کنار هم هستند → ab,c,d,e,f

۲!×۲!×۴! = تعداد اعدادی که a,b کنار هم هستند و c,d کنار همند → ab cd e f

۲!×۵!−۲!×۲!×۴! = تعداد اعدادی که a و b کنار همند و c و d کنار هم نیستند

مثال: ۵ نفر a و b و c و d و e می‌خواهند سخنرانی کنند. به چند حالت بین فرد a و b فقط یک نفر سخنرانی می‌کند؟

حل:

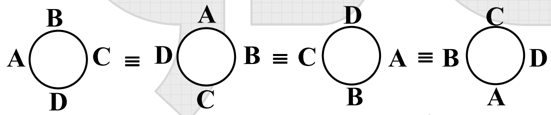
a □ b Δ *

۳! × ۲ × ۳ = ۳۶

افرادی که بین a,b صحبت می‌کنند — جابجا شدن a,b — جایشگت ۳ شیء — ۳ نفر می‌توانند بین a,b صحبت کنند

جایگشت با اشیاء دایره‌ای:

اگر ابتدا و انتهای یک صف را به هم متصل کنیم و یا n شیء را دور یک میزگرد قرار دهیم، جایگاه شروع و پایان بی‌معنی می‌شود. در واقع چهار حالت زیر با هم معادلند و یک حالت محسوب می‌شوند:



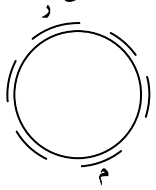
لذا اگر اشیا به صورت دایره ای چیده شود فرد اولی که تصمیم به نشستن می‌گیرد، دارای ۱ انتخاب است چون بین مکانهای نشستن هیچ تفاوتی نیست، اما بقیه افراد به نسبت این فرد دارای مکان خواهند شد که $n-1$ نفر باقیمانده دارای $(n-1)!$ جایگشت هستند.

تذکر: اگر اشیاء قابل وارونه‌سازی باشند (مانند دسته کلید، دست‌بند، گردنبند و تسبیح) تعداد جایگشت n شیء برابر است با $\frac{(n-1)!}{2}$ در این حالت جهت چرخش نیز فاقد اهمیت می‌باشد.

مثال: اگر رئیس، معاون و چهار کارمند مختلف بخواهند دور یک میز بنشینند، این کار به چند طریق امکان پذیر است هرگاه:

الف) رئیس مقابل معاون باشد:

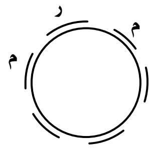
حل: اگر رئیس بنشیند، معاون فقط می‌تواند در مکان مقابل رئیس بنشیند و ٤ کارمند بـه دلخـواه مـی‌تواننـد بنشـینند. (یعنـی مسـئله تبدیل به صف می‌شود.)



۴! = ۲۴

ب) رئیس مجاور معاون باشد:

✍ **حل:** در این حالت معاون برای نشستن ۲ انتخاب دارد که در کدام طرف رئیس بنشیند.



جای معاون

$$4! \times \underset{\uparrow}{2} = 48$$

جایگشت با اشیاء تکراری:

اگر بخواهیم جایگشت n شیء که k_1 تا از آنها از نوع اول و k_2 تا از آنها از نوع دوم و ..... k_m تا از آنها از نوع m ام باشد را حساب کنیم (با شرط اینکه $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$) تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

☜**مثال: با ارقام ۰و۰و۴و۴و۵و۵و۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان ساخت؟**

✍ **حل:** فرض کنید ارقام متمایز باشند، مثلاً $0, 0', 0'', 4, 4', 4'', 5, 5', 5''$. در پایان وقتی اعداد ۹ رقمی نوشته شده، جایگشت اشیا تکراری را حذف می‌کنیم.

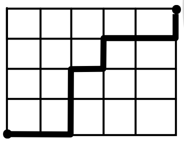
برای سمت چپ نمی‌توانیم از صفر استفاده کنیم.

$$\frac{\overset{\uparrow}{6} \times 8!}{3! \times 3! \times 3!}$$

☜**مثال: با ارقام ۰و۰و۰و۴و۴و۴و۴ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟**

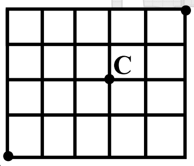
✍ **حل:** فرض کنید ارقام متمایز باشند، تعداد جایگشتها بدون در نظر گرفتن تکرار برابر است با : $\dfrac{4 \times 7!}{4! \times 4!}$

☜**مثال: در شبکه مستطیلی شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه A به نقطه B حرکت کرد به طوری که کوتاه‌ترین مسیر پیموده شود؟**



✍ **حل:** برای آن‌که با کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم باید حداقل ۹ حرکت انجام دهیم. مثلاً دنباله rruururru نشان‌دهنده‌ی مسیر فوق است. (r نشان دهنده‌ی حرکت به سمت راست و u نشان دهنده‌ی حرکت به سمت بالاست) باید ۵ حرکت به راست و ٤ حرکت به بالا انجام دهیم یعنی یک دنباله متشکل از ٤ تا u و ۵ تا r که این کار به $\dfrac{9!}{5!\,4!}$ حالت امکان‌پذیر است.

☜**مثال: در مسأله فوق اگر بخواهیم تعداد مسیرهایی را بدست آوریم که حتماً از نقطه c بگذرند، به چند طریق ممکن است؟**



✍ **حل:** ابتدا از A به C می‌رویم، سپس از C به B می‌رویم: $\dfrac{4!}{2! \times 2!} \times \dfrac{5!}{3! \times 2!}$

انتخاب:

تا اینجا در مسائل کلیه داده‌های مسأله در شمارش حالات ممکن مورد استفاده قرار می‌گرفت. حال به بررسی شمارش جایگشت حالاتی می‌پردازیم که در آن قسمتی از مجموعه داده شده انتخاب شده باشد. در اینجا ابتدا باید تعداد حالاتی که می‌توان اشیاء را انتخاب کرد را به دست آورد (ترکیب) و سپس جایگشت اشیا انتخاب شده را محاسبه کرد (تبدیل).

تبدیل:

تعداد حالات قرار گرفتن r شیء که از بین n شیء انتخاب شده‌اند در کنار یکدیگر، جایگشت r شیء از n شیءیا تبدیل r تایی n شیء می‌نامند. در واقع تبدیل، تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء می‌باشد به طوری که ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار یکدیگر، حائز اهمیت باشد.

قضیه: تعداد تبدیل‌هایی r شیء از n شیء برابر است با:

$$P(n,r)=(n)_r=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب:

تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء که در آن ترتیب انتخاب اهمیّت نداشته باشد را ترکیب r تایی n شیء یا ترکیب r از n می‌نامند و با $\binom{n}{r}$ یا $c(n,r)$ نشان می‌دهند.

به عبارت دیگر ترکیب r تایی n شیء یافتن زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی است.

ارتباط بین تعداد حالات انتخاب با ترتیب r شیء از میان n شیء با تعداد حالات انتخاب بدون ترتیب r شیء از میان n شیء به صورت زیر است:

$$P(n,r)=r!\times c(n,r)\Rightarrow c(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

نکته: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که شامل k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$ و تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که فاقد k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r}$ $\quad n-k\geq r$

☜مثال: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن o و m حتماً موجود باشند؟

✍ **حل:** ابتدا ۳ حرف دیگر که لازم داریم را انتخاب کرده، سپس همه را در یک ردیف می‌چینیم.

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{۳ حرف دیگر}}\times\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ حرف}}$$

☜مثال: با حروف کلمه History چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت که:

الف) حروف صدادار نداشته باشد؟

حروف صدادار a، e، i، o، u می‌باشند. فقط از ۵ حرف باقیمانده باید ٤ حرف انتخاب کنیم.

$$\binom{5}{4}\times4!=5\times4!=5!$$

ب) با حرف صدادار شروع شود و با حرف بی‌صدا ختم شود؟

$$\underset{\substack{\uparrow\\ i\\ o}}{\underline{2}}\quad\underline{5}\quad\underline{4}\quad\underset{\substack{\uparrow\\ h\\ s\\ t\\ r\\ y}}{\underline{5}}$$

$$2\times5\times4\times5=200$$

یا $2\times\left[\binom{5}{2}\times2!\right]\times5$

ج) با حرف T شروع شود و شامل S باشد؟

ابتدا ۲ عضو دیگر غیر از S را انتخاب کرده و سپس در کنار هم می‌چینیم.

$\{S,-,-\}$ $\qquad \binom{5}{2}\times 3!$ $\qquad \underline{T}\ \_\ \_\ \_$

مثال: ۸ خط دو به دو متمایز حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

حل: حداکثر تعداد نقاط تقاطع دو خط زمانی است که هر دو خط انتخابی همدیگردر نقاط متمایز قطع کنند. پس تعداد حالات تقاطع دوخط حداکثر برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی که از بین این خطوط‌می توان انتخاب کرد: $\binom{8}{2}$

مثال: از میان پنج مهره قرمز و چهار مهره سفید به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به نحوی دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد؟

حل: $\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{قرمز}}\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{سفید}}=40$

مثال: از بین ۵ مهره سفید متمایز و ٤ مهره آبی متمایز و ۳ قرمز متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند؟

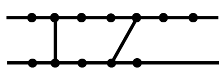
حل: ابتدا ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم، سپس در کنار هم می‌چینیم: $3!\times\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}$

مثال: در یک امتحان دانش‌آموزی باید هشت سؤال از میان ۱۰ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ به چهار سؤال از پنج سؤال اول اجباری باشد، او به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟

حل: دو حالت امکان‌پذیر است که نهایتاً با هم جمع می‌کنیم: $35=10+5\times5=\underbrace{\binom{5}{3}\binom{5}{5}}_{\text{۵ سوال از ۵ سوال اول}}+\underbrace{\binom{5}{4}\binom{5}{4}}_{\text{٤ سوال از ۵ سوال اول}}$

مثال: دو خط موازی داده شده‌اند. روی یکی از این خطها ۵ نقطه و روی دیگری ۷ نقطه قرار دارد. به چند طریق می‌توان با این نقاط، چهارضلعی ساخت؟

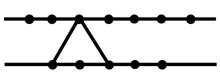
حل: ۲ نقطه از خط بالایی و ۲ نقطه از خط پایینی انتخاب می‌کنیم: $\binom{7}{2}\binom{5}{2}$

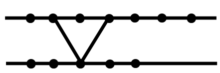


مثال:در مسأله فوق تعداد مثلث‌ها برابر کدام است؟

حل:

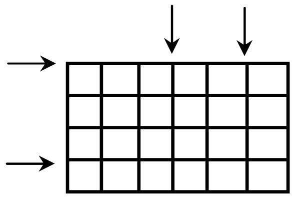
یا باید دو نقطه از بالایی انتخاب کنیم و یک نقطه از پایینی و یا بالعکس





$\binom{7}{1}\binom{5}{2}+\binom{7}{2}\binom{5}{1}$

☜مثال: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟



✍ **حل: باید ۲ خط از بین خط‌های افقی و ۲ خط از بین خط‌های عمودی انتخاب کنیم:** $\binom{5}{2}\binom{7}{2}$

در حالت کلی در یک شبکه $m\times n$ تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با: $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$

☜مثال: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتماً یک جفت در میان آنها باشد؟

✍ **حل:** ابتدا ۲ جفت انتخاب می‌کنیم. سپس یکی از جفت‌ها را برمی‌داریم. سپس از جفت باقی‌مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{10}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=180$$

راه ۲: ابتدا ۲ جفت برمی‌داریم، سپس ۳ لنگه را انتخاب می‌کنیم که حتماً بینشان ۱ جفت هست.

☜مثال: ۱۲ نفر متشکل از ٦ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ٤ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد به شرطی که در بین آن‌ها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

✍ **حل:**

ابتدا ٤ زوج انتخاب می کنیم سپس از بین این ٤ زوج از هرکدام یک نفر را انتخاب می کنیم ، در این حالت حتماً هیچ زن و شوهری با هم انتخاب نشده اند :

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب ٤ زوج}}\times\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

☜مثال: سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ده پرتاب یک سکه به این منظور رسید کدام است؟

✍ **حل:** باید از ۹ بار قبلی ۲بار رو آمده باشد: $\binom{9}{2}$

☜مثال: از بین ۸ نفر قبول شدگان المپیاد، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. تا تعداد عضوهای پیشامد آن که در آن فرد مشخصی حتماً در بین انتخاب شدگان باشد کدام است؟

✍ **حل:** اگر فرد قبول شده حتماً در بین افراد باشد، کافی است دو نفر دیگر انتخاب کنیم: $\binom{7}{2}$

☜مثال: تساویهای زیر را با مفاهیم و روابط ترکیب اثبات کنید.

الف) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

اگر بخواهیم از بین جمعی nنفره، k نفر که یکی از آنها رییس باشد، انتخاب کنیم ۲ راه داریم:

۱- اول k نفر را انتخاب می‌کنیم. سپس ۱ نفر را از بین این k نفر به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم: $\binom{k}{1}\binom{n}{k}$

۲- یا اول ۱ نفر را به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم و سپس از بین بقیه افراد $k-1$ نفر را انتخاب می‌کنیم: $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{1}$

ب) $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{۰}\binom{n}{k}+\binom{m}{۱}\binom{n}{k-۱}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{۰}$$

اگر بخواهیم از ۲ گروه m نفره و n نفره، k نفر را انتخاب کنیم به ۲ طریق امکان‌پذیر است.

۱- هم‌زمان k نفر را انتخاب کنیم. $\binom{m+n}{k}$

۲- از گروه اول و دوم به‌ترتیب افرادی انتخاب کنیم که جمعاً k نفر باشند.

۰ نفر از گروه اول　　k نفر از گروه دوم

$$\binom{m}{۰}\binom{n}{k}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{۰}$$

الگوهای پرکاربرد:

کنار هم چیدن اشیائی که بعضی از آن‌ها نباید کنار هم قرار گیرند:

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می‌چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آن‌ها اشیائی که نمی خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می‌دهیم.

☜**مثال: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف b و پنج حرف a می‌توان ساخت به طوری که هیچ دو a کنار هم نباشند؟**

✍ **حل: ابتدا bها را می‌چینیم، سپس در فواصل به‌وجود آمده، aها را جایگزین می‌کنیم:**

$-b-b-b-b-b-b-b-$　　حالت $\binom{۸}{۵}$

☜**مثال: با ارقام ۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱ چند عدد هفت رقمی می‌توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آن‌ها دو رقم متوالی زوج نباشند؟**

✍ **حل:** ابتدا ارقام فرد را می‌چینیم و در بین آن‌ها زوج‌ها را جا می‌دهیم:

جایگاه رقم زوج

$$\binom{۵}{۳}\times ۳!\times ۴!$$　　ـ ف ـ ف ـ ف ـ ف ـ

جایگشت زوج‌ها با هم　　جایگشت فردها با هم

☜**مثال: حروف EEEFFFDD را به چند طریق می‌توان پیش هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها پیش هم نباشند؟**

✍ **حل:**

$-F-F-F-D-D-$　　$$\binom{۶}{۳}\times\frac{۵!}{۳!\times ۲!}$$

محل قرار گرفتن Eها　　جایگشت Fها و Dها با هم

چینش اشیائی که عده ای از آنها ترتیبشان از قبل معلوم است:

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه‌ی اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

مثال: هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه‌ای ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟

حل: ابتدا به $\binom{7}{3}$ حالت، طبقه پیاده شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ۴ طبقه لحاظ می‌کنیم: $\binom{7}{3}\times 4!$

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟

حل: ابتدا ۳ رقم را به $\binom{10}{3}$ حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

مثال: با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها A بعد از O و نیز E بعد از A باشد؟

حل: ابتدا مکان A و E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲تا H داریم):

$$\binom{8}{3}\times\underbrace{\frac{5!}{2!}}_{\text{جایگشت Hها با هم}}$$

تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند:

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند، با تقسیم‌بندی مسأله به حالت‌های مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می‌آوریم.

مثال: با ارقام ۲ و۲ و۴ و۴ و۶ و۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

حل:

{۲,۴,۶} اعداد بدون تکرار ← حالت $3!=6$ (جایگشت ارقام)

{*,-,-} اعداد با یک تکرار ← $\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{رقم تکرارشونده}}\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{رقم غیرتکراری}}\times\frac{3!}{2!}=18$

← **کل اعداد $= 18+6=24$**

☜مثال: با حروف کلمه ALIABAD چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟

✍ حل:

حداکثر یک A $\binom{5}{4}\times 4!$

دوبار A بیاید: AA $\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2}$

انتخاب ۲ رقم دیگر — جایگشت ارقام

سه‌بار A بیاید: AAA $\binom{4}{1}\times\frac{4!}{3!}$

انتخاب ۱ رقم دیگر — جایگشت ارقام

کـل کلمـات → $= 120 + 72 + 16 = 208$

خواص ترکیب:

۱- داریم:

الف) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \Rightarrow$ اگر $\binom{n}{x}=\binom{n}{y}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x+y=n\end{cases}$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شیئ از بین n شیئ با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است .

یا تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با تعداد زیر مجموعه های $n-r$ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است .

ب) $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$ **قاعده پاسکال**

این قضیه مفهوماً به این معناست که در انتخاب r عضو یک عضو معین یا حضور دارد یا ندارد . سمت راست شمارش نامنظم و سمت چپ شمارش منظم است .

تعیین ضریب یک جمله از بسط:

نکته: در حالت کلی در بسط $(a_1+a_2+\ldots+a_r)^n$ ضریب جمله $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_r^{k_r}$ $(\sum_{i=1}^{r}k_i=n)$ برابر است با $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$

☜مثال: در بسط $(a+b+c)^5$ ضریب جمله a^3bc کدام است؟

✍ حل: چون جمله a^3bc در واقع aaabc بوده، تمام جایگشت‌های c,b,a,a,a جمله‌ی a^3bc تولید می‌کند و ضریب جمله در واقع تعداد دفعاتی است که یک جمله تولید می‌شود. (چون به همان تعداد بار این جمله با خودش جمع می‌شود.)

$\frac{5!}{3!}\times a^3bc \leftarrow aaabc = a^3bc$

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\ldots+\binom{n}{n}x^0y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

نتایج: با قرار دادن $x=y=1$ و $x=-y=1$ نتایج مفید زیر به دست می آید :

$$1)\ x=y=1 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2)\ x=-y=1 \Rightarrow \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots=0 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

یعنی تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی یک مجموعه با هم برابر است.

مثال: اگر $\binom{n}{10}=\binom{n}{11}$ حاصل $\binom{n}{19}$ کدامست؟

حل:

$$\rightarrow n=10+11 \rightarrow \binom{21}{19}=\frac{21\times 20}{2}=210$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

الف) $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6}+\binom{11}{7}=$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\binom{8}{3}+\binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}+\binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}+\binom{10}{6}}_{\binom{11}{6}}+\binom{11}{7}}_{\binom{12}{7}}$$

ب) $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=$

ابتدا به‌جای $\binom{2}{2}$، $\binom{3}{3}$ را جایگزین کرده و سپس متوالیاً از قاعده‌ی پاسکال بهره می‌گیریم.

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\dots\binom{20}{3}+\binom{20}{2}=\binom{21}{3}$$