گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

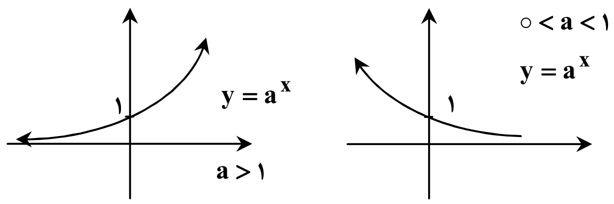
(فصل ۴)

سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

توابع نمایی:

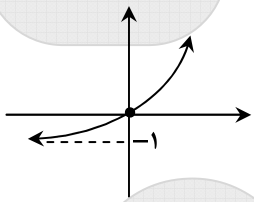
هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی و $a \neq 1$ و $a > 0$ و x متغیر است. یک تابع نمایی نامیده می‌شود. دامنه توابع نمایی تمام اعداد حقیقی و برد آن R^+ است.



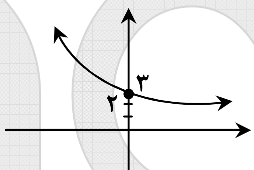
در این حالت اکیداً نزولی است. **در این حالت اکیداً صعودی است.**

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

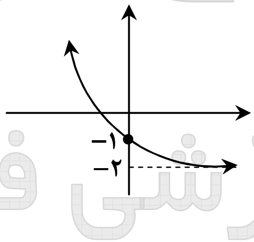
$y = 2^x - 1$



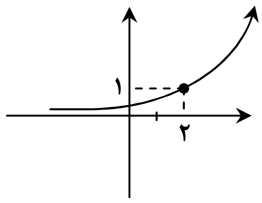
$y = (\frac{1}{3})^x + 2$



$y = 3^{-x} - 2$

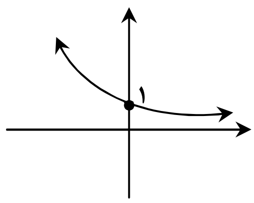


$y = 3^{x-2}$



$y = \frac{(\frac{1}{6})^x}{5^{-x}}$

$y = \frac{6^{-x}}{5^{-x}} = (\frac{6}{5})^{-x} = (\frac{5}{6})^x$



خواص تابع نمایی:

۱) $a^x.a^y=a^{x+y}$ ۲) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ ۳) $(a^x)^y=a^{xy}$

مثال: اگر سرعت تکثیر سلول‌ها براساس یک تابع نمایی قابل مدل‌سازی باشد، و بعد از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ و بعد از ٤ ساعت ٤٨ باشد، تعداد سلول‌ها ۷ ساعت پس از شروع تکثیر چقدر است؟

حل:

اگر سرعت رشد سلول‌ها را با تابع $y=ka^t$ مدل‌سازی کنیم، داریم:

$$\left.\begin{matrix} y(۲)=ka^۲=۱۲ \\ y(۴)=ka^۴=۴۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^۲=۴ \xrightarrow{a>۰} a=۲ \to k=۳$$

$$\to y(t)=۳\times ۲^t \to y(۷)=۳\times ۲^۷=۳۸۴$$

دقت کنید که علت استفاده از ضریب k آن است که سلول‌ها با یک مقدار اولیه شروع به افزایش می‌کنند. این مقدار اولیه را در لحظه‌ی $t=۰$، k در نظر گرفتیم.

مثال: معادلات یا نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{۱}{۵\sqrt{۵}})^x=۱۲۵^{۲x-۱}$

$$۵^{-\frac{۳}{۲}x}=۵^{۶x-۳} \Rightarrow ۶x-۳=-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow ۶x+\frac{۳}{۲}x=۳ \Rightarrow \frac{۱۵}{۲}x=۳ \Rightarrow x=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) $۹^x=۲\times ۳^{x+۲}-۴۵$

$$۳^{۲x}-۲\times ۹\times ۳^x+۴۵=۰ \Rightarrow (۳^x)^۲-۱۸(۳^x)+۴۵=۰ \Rightarrow (۳^x-۱۵)(۳^x-۳)=۰ \left\langle \begin{matrix} ۳^x=۱۵ \to x=\log_۳^{۱۵} \\ ۳^x=۳ \to x=۱ \end{matrix}\right.$$

ج) $(۳-\sqrt{۸})^{x^۲}\ge(۳+\sqrt{۸})^x$

$$(۳-\sqrt{۸})\times\frac{(۳+\sqrt{۸})}{۳+\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۳+\sqrt{۸}}$$

$$(\frac{۱}{۳+\sqrt{۸}})^{x^۲}\ge(۳+\sqrt{x})^x \Rightarrow (۳+\sqrt{۸})^{-x^۲}\ge(۳+\sqrt{۸})^x$$

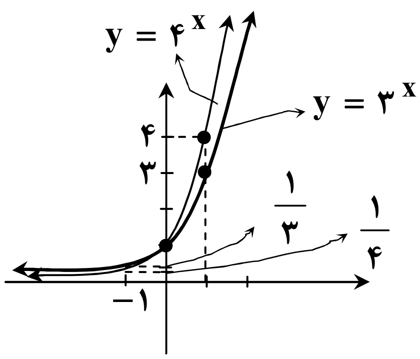
چون $۳+\sqrt{۸}>۱$ است، پس این تابع صعودی است، لذا لازم است:

$$-x^۲\ge x \Rightarrow x^۲+x\le ۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۰$$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۳^x-۴^x}$ کدام است؟

حل:

باید $۳^x-۴^x\ge ۰$ باشد، پس باید $۳^x\ge ۴^x$ باشد. چون $۳<۴$ است، پس تابع ۴^x برای $x\ge ۰$ سریع‌تر از تابع ۳^x بزرگ می‌شود و برای $x<۰$ سریعتر از تابع ۳^x کوچک می‌شود.



پس برای $x\le ۰$، $۳^x\ge ۴^x$ است، لذا دامنه‌ی تابع $D=(-\infty,۰]$ است.

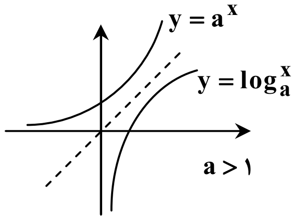
توابع لگاریتمی:

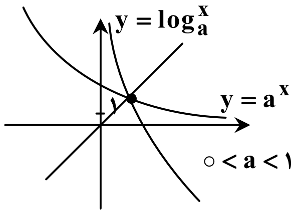
چون تابع نمایی $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ تابعی یک به یک است، لذا معکوس‌پذیر است. معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نامیده می‌شود.

$y=a^x \Rightarrow x=\log_a^y \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_a^x$

دامنه تابع لگاریتمی: $D_f=\{x>0 \mid a>0, a\neq 1\}$

برد توابع لگاریتمی R است.

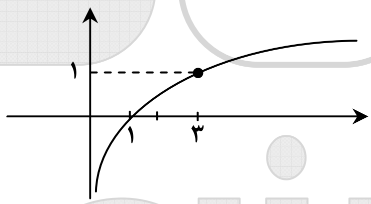




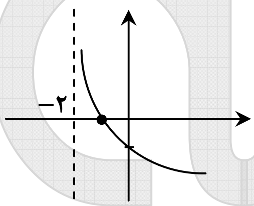
اگر پایه لگاریتم را ذکر نکردند، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

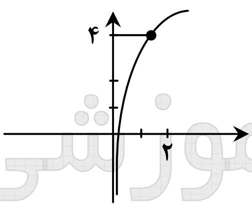
الف) $y=\log_3^x$



ب) $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x+2}$



ج) $y=\log_2^x+3$



☜مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$

$$\log\frac{5x-x^2}{4}\geq 0 \Rightarrow \frac{5x-x^2}{4}\geq 1 \Rightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)\leq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 4$$

دقت کنید که شرط $\frac{5x-x^2}{4}\geq 1$، شرط $\frac{5x-x^2}{4}>0$ را هم تأمین می‌کند.

ب) $f(x)=\log_{1+x}^{9-x^2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9-x^2>0 \Rightarrow -3<x<3 \\ 1+x>0, 1+x\neq 1 \Rightarrow x>-1, x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D=(-1,3)-\{0\}$

$f(x)=\sqrt{\log^{\log^{\log^{x-2}}}}$

ج) $\log^{\log^{\log^{x-۲}}} \ge ۰ \to \log^{\log^{(x-۲)}} \ge ۱۰^{۰} = ۱ \Rightarrow \log^{(x-۲)} \ge ۱۰^{۱} = ۱۰$

$\Rightarrow x-۲ \ge ۱۰^{۱۰} \Rightarrow x \ge ۱۰^{۱۰}+۲ \Rightarrow D = [۱۰^{۱۰}+۲, \infty)$

خواص لگاریتم:

۱) $\log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$

۲) $\log_a^۱ = ۰$ و $\log_a^a = ۱$

۳) $\log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy}$

٤) $\log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$

٥) $\log_{a^n}^{x^m} = \frac{m}{n}\log_a^x$

٦) $\log_y^x = \dfrac{\log_z^x}{\log_z^y}$

در حالت کلی: $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$

این قضیه به تعداد نامحدودی لگاریتم قابل تعمیم است.

نتیجه: $\log_y^x = \dfrac{۱}{\log_x^y}$

٦) $x^{\log_a^y} = y^{\log_a^x}$

اگر لگاریتم دو عدد باهم برابر باشند، خود دو عدد نیز برابرند. تساوی فوق با لگاریتم گرفتن از دو طرف اثبات می‌شود.

٧) $a^{\log_a^x} = x$

٨) $\log_a^x > y : \begin{cases} x > a^y & a > ۱ \\ x < a^y & ۰ < a < ۱ \end{cases} \quad (x > ۰, y \in R)$

مثال: اگر $\log_{۱۲}^۳ = a$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶}$ کدام است؟

حل:

$\log_{۱۲}^۳ = a \to \log_۳^{۱۲} = \frac{۱}{a} = \log_۳^{۳\times۴} = \log_۳^۳ + \log_۳^۴ = ۱ + \log_۳^۴ = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_۳^۴ = \frac{۱}{a} - ۱$

$\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶} = \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۴^۲} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_۳^۴ = ۴\log_۳^۴ = ۴(\frac{۱}{a} - ۱) = \frac{۴(۱-a)}{a}$

مثال: اگر $\log^۲ = ۰/۳۰۱$ باشد، $\log^{۲۵}$ چقدر است؟

حل:

$\log^{۵^۲} = ۲\log^۵ = ۲\log^{\frac{۱۰}{۲}} = ۲(\log ۱۰ - \log ۲) = ۲(۱ - \log ۲) = ۲(۱ - ۰/۳۰۱) = ۱/۳۹۸$

مثال: لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه‌ی ٤/٥ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

حل:

$\log_۹^x = \log_۹^{\frac{۱}{x^۲}} + ۴/۵ \Rightarrow \log_۹^x - \log_۹^{\frac{۱}{x^۲}} = \frac{۹}{۲}$

$\Rightarrow \log_۹^{\frac{x}{\frac{۱}{x^۲}}} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \log_{۳^۲}^{x^۳} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_۳^x = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \log_۳^x = ۳ \Rightarrow x = ۳^۳ = ۲۷$

مثال: اگر $\log_{b}^{a} = \frac{3}{2}$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

حل:

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{a} + \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{b}^{a} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_{b}^{b} = 2\log_{b}^{a} + 4\log_{b}^{b} = 2\log_{b}^{a} + 4 = 2\times\frac{3}{2} + 4 = 7$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $5^{(2\log_{5}^{2} + 3\log_{5}^{3})}$

$$5^{\log_{5}^{4} + \log_{5}^{27}} = 5^{\log_{5}^{4\times 27}} = 4\times 27 = 108$$

ب) $[\log_{6}^{2}] + [\log_{2}^{6}]$

$$\left.\begin{array}{l}\log_{6}^{1} = 0\\ \log_{6}^{6} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \log_{6}^{2} < 1 \Rightarrow [\log_{6}^{2}] = 0$$

$$\log_{2}^{4} = 2 \Rightarrow \log_{2}^{8} = 3 \Rightarrow 2 < \log_{2}^{6} < 3 \Rightarrow [\log_{2}^{6}] = 2 \Rightarrow [\log_{2}^{6}] + \left[\ \log_{6}^{2}\ \right] = 2$$

ج) $(0/2)^{-2+\log_{\sqrt{5}}^{10}}$

$$(0/2)^{-2+\log_{5^{\frac{1}{2}}}^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{5}^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+2\log_{5}^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+2(\log_{5}^{2}+\log_{5}^{5})} = (0/2)^{-2+2\log_{5}^{2}+2} = (0/2)^{\log_{5}^{4}}$$

$$= \left(\frac{10}{2}\right)^{-\log_{5}^{4}} = 5^{\log_{5}^{4^{-1}}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

د) $|\log_{\frac{1}{2}}^{8}| + \log_{8}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$|\log_{2^{-1}}^{2^3}| + \log_{2^3}^{2^{-\frac{1}{2}}} = |\frac{3}{-1}\log_{2}^{2}| + \frac{-\frac{1}{2}}{3}\log_{2}^{2} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

هـ) $\log_{x^2\sqrt{x}}^{x\sqrt[3]{x^2}}$

$$\log_{x^{2+\frac{1}{2}}}^{x^{1+\frac{2}{3}}} = \log_{x^{\frac{5}{2}}}^{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}\log_{x}^{x} = \frac{2}{3}$$

مثال: مجموعه جواب معادلات یا نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $5^{x} = 3^{1-x}$

از دو طرف پایه ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{3}^{5^x} = \log_{3}^{3^{1-x}} \Rightarrow x\log_{3}^{5} = (1-x)\log_{3}^{3} = (1-x) \Rightarrow x(\log_{3}^{5}+1) = 1 \to x(\log_{3}^{5}+\log_{3}^{3}) \Rightarrow x = \frac{1}{\log_{3}^{15}} = \log_{15}^{3}$$

ب) $\log\frac{x+3}{5} < -1$

$$\frac{x+3}{5} < 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

ج) $\log^{x-1}+\log^{x+1}=\log^{3}$

$$\log^{(x-1)(x+1)}=\log^{3} \Rightarrow x^{2}-1=3 \Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

با توجه به دامنه $\log x$، فقط $x=2$ قابل قبول است.

د) $x^{\log_{5}^{x}}=625$

از ۲ طرف در پایه ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{5}^{(x^{\log_{5}^{x}})}=\log_{5}^{625}=\log_{5}^{5^{4}}=4$$

$$\log_{5}^{x}\times\log_{5}^{x}=(\log_{5}^{x})^{2}=4 \Rightarrow \log_{5}^{x}=\pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x=25 \\ x=\frac{1}{25} \end{array}\right.$$

هـ) $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{2^{-1}}^{2}=-1 \Rightarrow \frac{x-1}{3}>(\frac{1}{9})^{-1}=9 \Rightarrow x-1>27 \Rightarrow x>28$$

و) $\log(3x-1)=(\log 5)^{2}-(\log 2)^{2}$

$$\log^{3x-1}=(\log^{5}-\log^{2})(\log^{5}+\log^{2})=(\log^{\frac{5}{2}}\times\log^{10})=\log^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3x-1=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{7}{6}$$

ن) $\log_{x}^{3}+\log_{x}^{2x+9}=2$

$$\log_{x}^{3(2x+9)}=2 \Rightarrow 6x+27=x^{2} \rightarrow x^{2}-6x-27=0 \Rightarrow (x-9)(x+3)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=-3 \\ x=9 \end{array}\right.$$

با توجه به دامنه $\log^{x}$ که باید $x>0$ باشد، فقط $x=9$ قابل قبول است.

ی) $x^{1+\log_{10}^{x}}=10^{2}$

$$\log^{x^{(1+\log_{10}^{x})}}=\log 10^{2}=2$$

$$(1+\log_{10}^{x})\log_{10}^{x}=2 \rightarrow (\log^{x})^{2}+(\log^{x})-2=0 \rightarrow (\log^{x}+2)(\log^{x}-1)=0$$

$$\Rightarrow \log x=-2,1 \Rightarrow x=10^{-2},10$$

مثال: کدام عبارت صحیح است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{3}^{2}$ ۳) $\log_{5}^{3}>\log_{3}^{5}$ ۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

حل:

توابع لگاریتمی برای پایه‌های بزرگ‌تر از ۱ صعودی و برای پایه‌های کوچک‌تر از ۱ نزولی‌اند. پس عبارت زیر به‌علت نزولی بودن لگاریتم صحیح است: (به همین دلیل گزینه ٤ غلط است)

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$$

در گزینه‌ی ۲، $0<\log_{3}^{2}<1$ و $-2<\log_{\frac{1}{2}}^{3}=-\log_{2}^{3}<-1$ است. و در گزینه‌ی ۳: $\log_{3}^{5}>0$ و $\log_{5}^{3}<0$ است.

☜مثال: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد، عدد $۵^{۳۰}$ چند رقمی است؟

✍حل:

برای آن‌که بدانیم عدد چند رقمی است، ابتدا از آن لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۵^{۳۰} = ۳۰\log ۵ = ۳۰\log \frac{۱۰}{۲} = ۳۰(\log ۱۰ - \log ۲) = ۳۰(۱ - \log ۲) = ۲۰/۹۷$$

عدد $۱۰^{n-۱}$، عددی n رقمی است. حال کلیه اعداد n رقمی بین $۱۰^{n-۱}$ و ۱۰^{n} قرار دارند، لذا لگاریتم یک عدد n رقمی بین n و $n-۱$ است. لذا: اگر عدد A، n رقمی باشد، $[\log A]+۱ = n$ می‌باشد.

پس برای یافتن تعداد ارقام یک عدد پس از آن که از آن لگاریتم گرفتیم، از حاصل براکت گرفته و با یک جمع می‌کنیم. لذا این عدد: $[۲۰/۹۷]+۱ = ۲۱$ رقمی است.