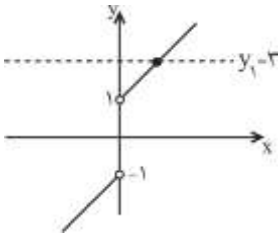


ردیف	سؤالات	نمره
۱	مساحت مربعی که یک راس آن $A(-۱,۳)$ و معادله ی یک ضلع آن $۳x-۴y+۱=۰$ است، بیابید.	۰/۷۵
۲	محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.	۱/۲۵
۳	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) جواب معادله ی $\sqrt{۲-x^۲} = x$ برابر می باشد. ب) اگر $f(x) = [x+۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲-\sqrt{۲})$ برابر است. ج) اگر $\log ۲ = ۰/۲$, $\log ۳ = ۰/۴۷$ باشد، حاصل $\log ۱۵۰۰$ است. د) تابع $f(x) = \frac{۱}{[x]}$ فقط در همسایگی $x=۱$ تعریف می شود.	۲
۴	معادله ی $x + \frac{x}{ x } = ۳$ را به روش هندسی حل کنید.	۱/۵
۵	دو تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x) = \sqrt{x+۴}$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار $(f+g)(۰)$ را به دست آورید. ب) دامنه ی $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.	۱
۶	اگر $f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^۲ - ۴x + ۵$.	۱
۷	آیا تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۱
۸	از ۲۰ گرم یک عنصر پس از یک ساعت ۵ گرم باقی مانده است. نیم عمر این عنصر چند دقیقه است؟	۱
۹	معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید. الف) $\log \frac{x+۳}{\sqrt{۷}} + \log \frac{x-۳}{\sqrt{۷}} = ۲$ ب) $\log(x+۴) = \frac{۱}{۲} \log(۲x+۱۱)$	۱/۵
۱۰	چرخ و فلکی به قطر ۱۶ متر در هر دقیقه یک دور در جهت مثبت مثلثاتی می زند، اگر ارتفاع پایین ترین نقطه ی چرخ و فلک از سطح افق ۴ متر باشد و در لحظه ی $t_۰ = ۰$ شخصی در بالاترین نقطه ی چرخ و فلک قرار داشته باشد: الف) پس از گذشت چند ثانیه کمانی که کابین می پیماید $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان می شود. ب) پس از گذشت چند ثانیه فاصله ی کابین شخص از قطر افقی برای سومین بار ماکزیمم می شود. پ) تابعی که ارتفاع کابین را برحسب زمان در SI نشان می دهد را به دست آورید.	۱/۵
۱۱	درستی اتحاد $\sqrt{۲} \sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.	۱
۱۲	حاصل را بیابید. الف) $\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin \frac{\pi}{۱۲}\right) \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos \frac{۵\pi}{۱۲}\right)$ ب) $\frac{\cos ۲۰ \cdot \sin ۱۰}{\cos ۱۰} - \sin ۲۰$	۱/۵
۱۳	تابع f با ضابطه ی $f(x) = a[x] + [x+۱]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow ۱} f(x)$ موجود باشد. [] نماد جزء صحیح است.	۰/۷۵
۱۴	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	۳

	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 2x}{2x^2} \quad (\text{ب})$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2} \quad (\text{الف})$	
		$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \quad (\text{ج})$	
۱/۲۵	<p>ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.</p>		۱۵
۲۰	جمع	«موفق باشید»	

۴. نمودار دو تابع $y_1 = 3$ و $y_2 = x + \frac{x}{|x|}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و محل تلاقی آنها را می‌یابیم.

$$y_2 = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$



بنابراین خط $y_1 = 3$ ، نمودار تابع $y = x + \frac{x}{|x|}$ را در یک نقطه قطع می‌کند. محل تلاقی را از معادله‌ی زیر می‌یابیم:

$$x+1=3 \rightarrow x=2$$

۵. الف)

$$\begin{aligned} (f+g)(0) &= f(0) + g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} \\ &= \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ب)

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } D_g = [-4, +\infty)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$= ([-4, +\infty) - \{2\}) - \{-4\} = (-4, +\infty) - \{2\}$$

۶.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 4x + 5 \quad (1)$$

در تابع $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ، $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 \quad (2)$$

سمت چپ دو معادله‌ی (۱) و (۲) با هم برابرند، پس سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2)$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$$

۷. اگر به ازای دو مقدار متمایز از دامنه‌ی تابع $(x_1 \neq x_2)$ ، مقادیر y (خروجی) برابر باشد تابع یک به یک نیست. در این تابع خواهیم داشت:

$$f(0) = 0 \text{ و } f(2) = 0$$

۱. از آن جا که مختصات نقطه ی A در معادله خط صدق نمی‌کند، طول ضلع مربع برابر با فاصله نقطه از خط می‌شود.

$$a = \frac{|3x_A - 4y_A + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 12 + 1|}{5} = \frac{14}{5}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{196}{25}$$

۲. اگر طول مستطیل را با a و عرض آن را با b نمایش دهیم آنگاه:

$$\text{محیط: } 2(a+b) = 18 \Rightarrow S = a+b = 9$$

$$\text{مساحت: } ab = 14 \Rightarrow P = ab = 14$$

بنابراین اضلاع مستطیل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 7$$

پس $a = 7$ و $b = 2$.

۳. الف) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم:

$$2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ و } x \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

حال طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{0 \leq x \leq \sqrt{2}} x = 1$$

ب)

$$f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [5 - \sqrt{2}]$$

$$= [5 - 1/4] = [3/6] = 3$$

ج)

$$\log 1500 = \log(3 \cdot 5 \cdot 100) = \log 3 + \log 5 + \log 10^2$$

$$= \log 3 + \log\left(\frac{10}{2}\right) + 2\log 10$$

$$= \log 3 + \log 10 - \log 2 + 2\log 10$$

$$= 0.47 + 1 - 0.3 + 2 = 3.17$$

د)

راست: دامنه ی تابع F را می‌یابیم

مخرج مساوی صفر

$$[x] = 0 \rightarrow 0 \leq x < 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$$

با توجه به دامنه تابع در همسایگی راست تعریف می‌شود.

پس تابع یک به یک نیست.

اگر خود لحظه‌ی $t=0$ را در نظر بگیریم 60 ثانیه می‌شود.

(پ)

$$y = r \sin(\omega t + \theta_0) + y_0 \quad T = 60$$

$$r = 8, \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{30}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 8 + 4 = 12$$

$$\text{لذا: } y = 8 \sin\left(\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{2}\right) + 12$$

۸

$$Q(t) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow{A=20, t=60, Q(60)=5} Q(60) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = 5$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{60}{T} = 2 \rightarrow T = 30$$

۹

(الف)

۱۱

از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x$$

$$\log_{\sqrt{7}}^{(x-3)(x+3)} = 2 \rightarrow (x+3)(x-3) = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$x^2 - 9 = 7 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است زیرا به ازای آن عبارت جلوی

لگاریتم‌ها منفی می‌شود.

(۱۲ الف)

(ب)

$$\cos \frac{\Delta\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{لذا: } a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\text{و } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{4} - \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{12}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\log(x+4) = \frac{1}{2} \log(2x+11)$$

$$\rightarrow 2 \log(x+4) = \log(2x+11)$$

$$\rightarrow \log(x+4)^2 = \log(2x+11)$$

$$\rightarrow (x+4)^2 = 2x+11$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$$

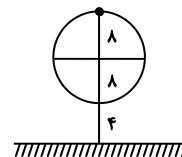
$x = -5$ غیر قابل قبول است، زیرا به ازای آن عبارت جلوی

$\log(x+4)$ منفی خواهد شد.

(ب)

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos 20 \sin 10 - \cos 10 \sin 20}{\cos 10} \\ &= \frac{\sin(10-20)}{\cos 10} = \frac{-\sin 10}{\cos 10} = -\tan 10 \end{aligned}$$

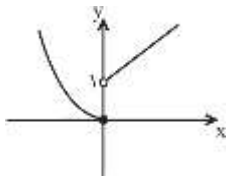
۱۰ الف)



$$\begin{aligned} 60' & \quad 2\pi \\ t & \quad \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{60 \times \frac{2\pi}{3}}{2\pi} \rightarrow t = 20s \end{aligned}$$

(ب) در هر نصف دور (π) یک بار فاصله Max است پس:

$$\begin{aligned} 60' & \quad 2\pi \\ t & \quad \pi + \pi + \pi \Rightarrow t = \frac{3\pi \times 60}{2\pi} \rightarrow t = 90s \end{aligned}$$



$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2$$

تابع f در $x=1$ ناپیوسته است.

۱۵

۱۳

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد یعنی حد چپ و راست تابع در $x=1$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x+1]) = a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[x] + [x+1]) = 0+1=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۱۴ الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-2} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

ج

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ را دارد.} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$